Τόμος Πρακτικών Φιλοσοφικού Forum «Ανάδρασις»
ISBN: 978-618-82935-0-2

Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΚΟΣΜΟΥ ΩΣ ΔΙΑΛΕΚΤΙΚΗ ΚΑΤΑ ΠΛΑΤΩΝΑ

Γεώργιος Χ. Κουμάκης

Επίκουρος Καθηγητής Φιλοσοφίας του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων

Περίληψη

Τὰ τέσσερα κάλλιστα τρίγωνα, μὲ τὰ ὁποῖα ὡς στοιχεῖα κατασκευάζονται τὰ πέντε κάλλιστα σώματα, διαιροῦνται σὲ ἀνὰ δύο ἀντίθετες κατηγορίες κατὰ τρόπο διαλεκτικό: ἡμιτετράγωνο καὶ ἡμιτρίγωνο. Τὸ τελευταῖο ὑποδιαιρεῖται πάλι σ' ἐκεῖνο 1) ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ 2) ἰσοσκελοῦς. Τὸ δεύτερο ὑποδιαιρεῖται πάλι σ' ἐκεῖνο μὲ γωνίες 1) 72^o, 54^o, 54^o, (36, 54, 90) καὶ 2) 36, 72, 72, δηλαδὴ χρυσοῦ τριγώνου (18, 72, 90). Ἡ γωνία κορυφῆς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ μὲ 36^o εἶναι διπλάσια ἀπὸ ἐκείνη τοῦ προηγουμένου. Μὲ τὸ σκαληνὸ ἡμιτρίγωνο κατασκευάζονται τὰ τέσσερα σχήματα, ἐνῶ μὲ τὸ ἡμιτετράγωνο, μόνον ὁ κύβος, ὁ ὁποῖος εἶναι σύμβολο τῆς γῆς. Μὲ τὸ ἡμιτρίγωνο ἰσοπλεύρου τριγώνου σχηματίζονται ἡ πυραμίδα, τὸ ὀκτάεδρο καὶ τὸ εἰκοσάεδρο, μὲ τὰ ὁποῖα γεννῶνται ἡ φωτιά, ὁ ἀέρας καὶ τὸ νερὸ ἀντίστοιχα. Μὲ συνδυασμὸ τῶν δύο ἄλλων ἡμιτριγώνων σὲ ἀναλογία δύο πρὸς ἕνα δημιουργεῖται τὸ δωδεκάεδρο, ποὺ ἀπεικονίζει τὸ πᾶν. Ἀπὸ τὴ μιὰ μεριὰ ἡ γέννηση, σύνθεση, ἁρμογή, συναγωγή, σύνδεσμος, δεσμὸς καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλη ἡ λύσις τοῦ κόσμου εἶναι οἱ δυὸ ἀντίθετοι δρόμοι τῆς διαλεκτικῆς.

Λέξεις κλειδιά: κάλλιστα τρίγωνα, δωδεκάεδρο, διαλεκτική.

Ἡ μαθηματικὴ δομὴ τοῦ αἰσθητοῦ κόσμου ἐντάσσεται στὸ πλαίσιο τῆς διαλεκτικῆς κατὰ Πλάτωνα, ἀφοῦ αὐτὴ συντελεῖται κατὰ τρόπο διαλεκτικὸ μὲ τὴ γνωστὴ μέθοδο τῆς σύνθεσης, τῆς διαίρεσης καὶ τῶν ἀναλογιῶν. Ὁ Πλάτων χρησιμοποίησε σύμβολα καὶ προέβη σὲ μαθηματικὲς διεργασίες γιὰ τὴ δημιουργία τοῦ κόσμου. Ἡ μαθηματικοποίηση ὅμως αὐτὴ δὲν εἶναι φανερὴ καὶ εὐδιάκριτη ἀλλὰ σκοτεινή, ἀσαφὴς καὶ αἰνιγματώδης. Ἐναπόκειται συνεπῶς στοὺς μελετητὲς τοῦ Πλάτωνα νὰ τὴν ἀνακαλύψουν, πρᾶγμα ποὺ δημιουργεῖ ἀμφιβολία καὶ ἀμφισβήτηση, ἀφοῦ πρόκειται γιὰ εἰκασίες καὶ ὑποθέσεις, ὅπου ὁ

ISBN: 978-618-82935-0-2

λόγος δύσκολα μπορεῖ νὰ εἶναι ἀσφαλὴς καὶ βέβαιος. Ὡστόσο, ἡ ἔστω κατὰ προσέγγιση ἀνεύρεση τῶν μαθηματικῶν παραμέτρων εἶναι ἀπαραίτητος ὅρος γιὰ τὴν κατανόηση τῆς διαλεκτικῆς του. Κατὰ συνέπεια ἡ τυχὸν λύση τῶν προβλημάτων ἐκ μέρους εἴτε τῶν πάλαι ποτὲ ἀκροατῶν εἴτε τῶν ἀναγνωστῶν τοῦ – ἂν καὶ ὅποτε αὐτὴ ἐπιτευχθεῖ - δημιουργεῖ τὶς ἀναγκαῖες προϋποθέσεις γιὰ τὴ σύλληψη τῆς διαλεκτικῆς, ἡ ὁποία μὲ κανένα τρόπο δὲν εἶναι δεδομένη, ἀλλὰ σπάνιο, κοπιῶδες καὶ ἐν τέλει πολύτιμο εὕρημα τῶν θαυμαστῶν της φιλοσοφίας του. Ὁ Πλάτων ἁπλῶς ἔθετε προβλήματα, ἀλλὰ δὲν τὰ ἔλυνε οὔτε ἔκανε αὐστηρὲς μαθηματικὲς ἀποδείξεις ὅπως π.χ. ὁ Εὐκλείδης. Χρησιμοποιοῦσε ὡστόσο τὰ μαθηματικὰ πορίσματα σιωπηρὰ (ex silentio). Αὐτὸ σημαίνει ὅτι γνώριζε τὰ συμπεράσματα τῶν ἀποδείξεων χωρὶς ὅμως νὰ τὶς παραθέτει. Ὅταν ὁ μαθηματικὸς Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεὺς μέμφεται συλλήβδην τοὺς φιλοσόφους ὅτι «ἀποφαίνονται» μόνον, διατυπώνουν τὴ γνώμη τους, χωρὶς ἀποδείξεις, συμπεριλαμβάνει προφανῶς καὶ τὸν Πλάτωνα (Σπανδάγος 2004β: Ἐ ἰθ΄, σ.32 καὶ Fr. Hultsch). Ἡ τακτική του αὐτὴ ἔχει ὠθήσει, βαθυστόχαστους καὶ ἀξιολογότατους φιλολόγους νὰ δεχθοῦν τὴν ἄγραφη διδασκαλία, ὑποθέτοντας ὅτι ὁ φιλόσοφος μόνον εἶπε τὴ φιλοσοφία του, ἀλλὰ δὲν τὴν ἔγραψε.

Ἡ τάση αὐτὴ κινεῖται ἐν μέρει στὴν ὀρθὴ κατεύθυνση, ἐπειδὴ οἱ ὀπαδοὶ της δίκαια ἀντιλήφθηκαν ὅτι ἡ φιλοσοφία τοῦ Πλάτωνα δὲν εἶναι γραμμένη ὅπως τὰ ἄλλα μαθήματα. Ἡ διαπίστωση αὐτὴ δὲν βασίζεται σὲ τυχὸν δυσχέρειες ποὺ εἶχαν νὰ κατανοήσουν δύσκολα σημεῖα τῶν κειμένων τοῦ Πλάτωνα, ὅπως γιὰ παράδειγμα τὴν τετμημένη γραμμὴ τῆς *Πολιτείας* (ΣΤ 509 d κ. ἑξ.), ἀλλὰ σὲ ἀναφορὲς τοῦ ἴδιου του Πλάτωνα καὶ ἰδιαίτερα στὸν *Φαῖδρο* καὶ στὴν *Ζ΄ Ἐπιστολὴ* καθὼς καὶ σὲ γραπτὰ ἀρχαίων σχολιαστῶν (Gaiser 1962). Τὸ περίεργο ὅμως εἶναι ὅτι ἐκεῖ ἡ φιλοσοφία παρουσιάζεται ὅτι δὲν εἶναι οὔτε ρητὴ οὔτε γραπτὴ (*Ζ΄ Ἐπ*. 341d: «γραφέντα ἢ λεχθέντα, γραπτέα καὶ ρητά», Πβ. Koumakis

ISBN: 978-618-82935-0-2

G. 2004), ἐνῶ ὑπάρχουν χωρία ποὺ ἔχουν παρερμηνευθεῖ. Γιὰ παράδειγμα, στὴν τετμημένη γραμμὴ σύμφωνα μὲ τὴν κρατοῦσα ἑρμηνεία τὰ δύο μεσαῖα τμήματά της εἶναι ἴσα, πρᾶγμα ποὺ ἀκυρώνει καὶ γελοιοποιεῖ τὴ σκέψη τοῦ Πλάτωνα. Ὁρισμένοι δικαιολογοῦν τὸ ἀτόπημα αὐτό, μὲ τὸ νὰ ἐπιρρίπτουν στὸν Πλάτωνα τὴν κατηγορία τῆς ἀπροσεξίας γιὰ τὸ σημαντικὸ αὐτὸ λάθος, ἐνῶ ἄλλοι ἰσχυρίζονται ὅτι ὁ Πλάτων εἶχε πλήρη συνείδηση τῶν ἐνεργειῶν του (Y. Balashov 1994: 283). Ὀρθότερη μου φαίνεται ἡ ἄποψη τοῦ Ι. Θεοδωρακόπουλου (1971: 54), σύμφωνα μὲ τὴν ὁποία ὁ ἀναγνώστης ἔχει τὴν ἐντύπωση ὅτι κατενόησε τὰ λόγια τοῦ Πλάτωνα, ἐνῶ ἔχει πλήρη ἄγνοια: «Εἶναι ὁ Πλάτων ἴσως ὁ δυσκολώτερος συγγραφέας καὶ πνευματικὸς δημιουργός του κόσμου, γιατί κανενὸς ἄλλου δημιουργοῦ ὁ λόγος δὲν ἀποπλανεύει τόσο τὸν ἀναγνώστη του, ὥστε νὰ νομίζει ὅτι τὸν καταλαβαίνει τὴν ὥρα ἀκριβῶς ποὺ δὲν ἔχει καταλάβει ἀκόμα τίποτε». Πάντως, ἀπὸ τὴ μαθηματικὴ συναρμογὴ καὶ ἐν συνεχείᾳ τὴ λύση τοῦ κόσμου προκύπτει ἡ διαλεκτική, ἡ ὁποία δὲν εἶναι ἄλλη ἀπὸ τὴν κατ' εἴδη διαίρεση καὶ σύνθεση. Ἄλλωστε καὶ τὰ τρίγωνα μὲ τὰ ὁποῖα δομεῖται ὁ κόσμος, διέπονται ἀπὸ τὴν κατ' εἶδος διαίρεση.

Ἡ γέννηση τοῦ κόσμου συντελέσθηκε κατὰ τὸν Πλάτωνα ἀπὸ τὸν δημιουργὸ κατὰ τρόπο μαθηματικό, ἀφοῦ χρησιμοποιήθηκαν ἀναλογίες κατὰ τὴ συναρμογή του (*Τίμ.*, 32c, 36d 6, 56c, *Πολιτ.*, ΣΤ 500c 4). Ἔτσι προῆλθε ἡ τάξη καὶ ἡ κοσμιότητα ἀπὸ τὴν ἀταξία, τὸ χάος καὶ τὴν ἀκοσμία (*Τίμ.*, 30a, *Πολιτικ.*, 273b 6). Αὐτὰ εἶναι ἀντανάκλαση τῆς ψυχῆς, ἡ ὁποία πρέπει νὰ ἐπιδιώκει καὶ νὰ ἀσκεῖ τὴ δικαιοσύνη καὶ τὴ σωφροσύνη, γιὰ νὰ εἶναι εὐδαίμων καὶ νὰ ἀποφεύγει τὴν ἀκολασία καὶ τὴν ἀδικία. Ὁ Πλάτων παραθέτει τὴ γνώμη τῶν σοφῶν ὅτι τὸ σύμπαν, αὐτὸ δηλαδὴ ποὺ ὀνομάζομε οὐρανό, γῆ, θεοὺς καὶ ἀνθρώπους, συνέχει ἡ ἐπικοινωνία, ἡ φιλία, ἡ κοσμιότητα, ἡ σωφροσύνη καὶ δικαιότητα, καὶ γι' αὐτὸν τὸν λόγο ὀνομάσθηκε κόσμος, καὶ ὄχι ἀκοσμία ἢ ἀκολασία (*Γοργ.*, 507c –

ISBN: 978-618-82935-0-2

508a, *Πρωτ.* 322c). Λόγω τῶν ἀναλογιῶν, ποὺ χρησιμοποίησε ὁ Πλάτων στὴ δομὴ τοῦ κόσμου, κατηγορήθηκε ἀπὸ τὸν μαθητὴ τοῦ Ἀριστοτέλη ὅτι καταμαθηματικοποίησε, «κατεμαθηματικεύσατο τὸ πᾶν», ὅπως ἀναφέρει ὁ Ἰωάννης ὁ Φιλόπονος (1897: 481, 34. Πβ. Δ. Μούκανος 1979: 66-72). Ἀπὸ τὸν *Τίμαιο* τοῦ Πλάτωνα ἐπηρεάστηκαν ἐντονότατα ὄχι μόνο οἱ ἀρχαῖοι ὅπως οἱ Στωικοὶ (Ἑ. Καραμπατζάκη 2014), ἀλλὰ καὶ οἱ μετέπειτα ἀστρονόμοι, οἱ ὁποῖοι ἐντυπωσιάστηκαν ἀπὸ τὴ μαθηματικοποίηση τοῦ παντός, ὅπως ὁ Kepler (1981, Π. Παπασπύρου 2014), ὁ Γαλιλαῖος καὶ ὁ νομπελίστας φυσικὸς W. Heisenberg (2008, 21, 286), ὁ ὁποῖος ἀπέδωσε μεγάλη σημασία στὰ τρίγωνα, μὲ τὰ ὁποῖα ὁ Πλάτων οἰκοδομεῖ τὸν κόσμο. Τὰ ἴδια εἶναι συμμετρικὰ (D. Lloyd 2006). Παραθέτουμε τὰ λόγια τοῦ Γαλιλαίου (1623: 17) κατὰ τὴ μετάφραση τῆς Χρ.Φίλη (2002). «Τὸ βιβλίο εἶναι γραμμένο σὲ μαθηματικὴ γλῶσσα καὶ τὰ σύμβολα εἶναι τρίγωνα, κύκλοι καὶ ἄλλα γεωμετρικὰ σχήματα, χωρὶς τὴ βοήθεια τῶν ὁποίων δὲν μποροῦμε οὔτε μιὰ λέξη νὰ κατανοήσουμε, χωρὶς αὐτὰ μάταια περιπλανιέται κανεὶς σ᾽ ἕναν σκοτεινὸ λαβύρινθο».

Τὸ ἐρώτημα ποὺ προβάλλει στὴ συνέχεια εἶναι νὰ μάθουμε ἢ μᾶλλον νὰ εἰκάσουμε γιὰ ποιὸν λόγο ὁ Πλάτων μαθηματικοποίησε τὴ δομὴ καὶ σύσταση τοῦ κόσμου καὶ γιατί κατέφυγε συγκεκριμένα στὰ τρίγωνα καὶ ὄχι σὲ ὁποιοδήποτε ἄλλο γεωμετρικὸ σχῆμα ἢ ἄλλου τύπου μαθηματικὲς ἀπεικονίσεις. Βέβαιη ἀπάντηση στὸ τεθὲν ἐρώτημα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουμε, διότι δὲν σῴζονται γραπτὲς μαρτυρίες. Μποροῦμε ὅμως νὰ κάνουμε ὑποθέσεις καὶ εἰκασίες, χρησιμοποιώντας τὴν ἔμμεση ἀπόδειξη, δηλαδὴ τὴν κατ᾽ ἀναλογίαν. Ὁ Πορφύριος στὸ βιβλίο τοῦ περὶ τοῦ *Πυθαγόρου βίου* (1982: 49 σ. 59) ἀναφέρει τὴ μαρτυρία, κατὰ τὴν ὁποία ἐξηγεῖται γιατί οἱ Πυθαγόρειοι παριστοῦσαν τὰ ὄντα μὲ τοὺς ἀριθμούς. Λέγει λοιπὸν ὅτι αὐτοί, ἐπειδὴ δὲν μποροῦσαν νὰ παραδώσουν μὲ τὸν λόγο τὰ πρῶτα εἴδη καὶ τὶς πρῶτες ἀρχές,

ISBN: 978-618-82935-0-2

λόγω του ὅτι ἦταν δύσκολες στὴ σύλληψη καὶ στὴν ἐκφορά, κατέφυγαν στοὺς ἀριθμοὺς χάριν μιᾶς εὐκολοκατανόητης διδασκαλίας, μιμούμενοι τοὺς γεωμέτρες καὶ τοὺς γραμματιστές. Οἱ γεωμέτρες μὴ δυνάμενοι κατὰ τὴ διδασκαλία νὰ παραστήσουν τὰ σωματοειδὴ μὲ τὸν λόγο προσέφυγαν στὰ διαγράμματα τῶν σχημάτων λέγοντας ὅτι τὸ τρίγωνο ποὺ διέγραφαν κάθε φορὰ δὲν ἦταν τοῦτο, συγκεκριμένα αὐτὸ τὸ τρίγωνο ποὺ ὑποπίπτει στὴν ὄψη μας, ἀλλὰ τοιοῦτο, δηλαδὴ τέτοιας λογῆς. Μὲ αὐτὰ οἱ γεωμέτρες ἤθελαν νὰ παραδώσουν στοὺς ἄλλους τὴν ἔννοια τοῦ τριγώνου. Ἐπειδὴ ὁ Πλάτων εἶχε ὑποστεῖ ἔντονη τὴν ἐπίδραση τῶν Πυθαγορείων, εἶναι φυσικὸ καὶ εὔλογο νὰ ὑποθέσει κανεὶς ὅτι τὸν ἴδιο δρόμο ἀκολούθησε στὸ σημεῖο αὐτό. Ἤθελε δηλαδὴ νὰ διδάξει στοὺς μεταγενέστερους τὸν τρόπο σύστασης τοῦ κόσμου. Ἐπειδὴ ὅμως αὐτὸ ἦταν ἐξαιρετικὰ δύσκολο, ἂν μὴ ἀδύνατο, νὰ γίνει μὲ λόγια, γι' αὐτὸ χρησιμοποίησε γεωμετρικὰ σχήματα καὶ μαθηματικὲς ἀναλογίες. Ἡ ἄποψη αὐτὴ ἐνισχύεται ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ τέσσερα πρῶτα καὶ κάλλιστα σώματα δὲν ὀνομάζονται ἀπὸ τὸν ἴδιο στοιχεῖα, ἀλλὰ γιγνόμενα καὶ ἀπολλύμενα, δηλαδὴ ἀπομιμήσεις τῶν ἀληθινῶν ὄντων, ὥστε γιὰ κανένα ἀπ’ ὅσα ἔχουν γένεση δὲν μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθεῖ πιστὸς καὶ βέβαιος λόγος (*Τίμ.*, 28a, 48e – 49a). Γιὰ ὅλα τα σώματα ποὺ ἔχουν γένεση δὲν πρέπει νὰ χρησιμοποιεῖται ἡ δεικτικὴ ἀντωνυμία τοῦτο ἀλλὰ τὸ τοιοῦτο, δηλαδὴ τέτοιας λογῆς, ἐπειδὴ δὲν ἔχουν σταθερὴ καὶ μόνιμη ὑπόσταση ἀλλὰ μεταπίπτουν συνεχῶς, ἀφοῦ τὸ ἕνα μεταβάλλεται στὸ ἄλλο. Στὴν ἴδια κατηγορία ὑπάγεται καὶ τὸ τρίγωνο καὶ ὅλα τα σχήματα (*Τίμ.*, 49c), ποὺ λέγονται μαθηματικά.

Τὸ ἐρώτημα ποὺ προκύπτει περαιτέρω εἶναι γιατί ὁ Πλάτων προτίμησε τὰ τρίγωνα καὶ ὄχι κάποιο ἄλλο γεωμετρικὸ σχῆμα. Ὁ ἴδιος δίνει ἔμμεσα ἀπάντηση λέγοντας ὅτι ἀπὸ τὰ τρίγωνα, καὶ συγκεκριμένα ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια, γεννῶνται ὅλα τα σχήματα καὶ κατ’ ἀκολουθίαν τὰ πέντε σώματα. Ὁ Ἰάμβλιχος σημειώνει

ISBN: 978-618-82935-0-2

ὅτι ἀπὸ τὸ τρίγωνο καὶ τὸ τετράγωνο γεννῶνται κατὰ Πλάτωνα τὰ πέντε σχήματα καὶ τὰ ἀντίστοιχα σώματα (Ἰάμβλιχος, 1922: 87). Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα χρησιμεύουν δηλαδὴ ὡς ἀρχὲς καὶ αἰτίες γένεσης ὅλων των ὁρατῶν ὄντων. Ὁ Πλάτων ὁμολογεῖ ὡστόσο ὅτι ὑπάρχουν κι ἄλλες ἀνώτερες ἀρχές, χωρὶς νὰ τὶς κατονομάζει, τὶς ὁποῖες γνωρίζει μόνον ὁ θεὸς καὶ ὁ φίλος του θεοῦ, δηλαδὴ ὁ φιλόσοφος (*Τίμ.*, 53 c – d). Αὐτὲς βρίσκονται προφανῶς στὸ βασίλειο τῶν ἰδεῶν μὲ προεξάρχουσα τὴν ἰδέα τοῦ ἀγαθοῦ, ἀφοῦ λέγεται ρητὰ ὅτι ὁ ὁρατὸς καὶ ἁπτὸς κόσμος εἶναι εἰκὼν τοῦ νοητοῦ (*Τίμ.*, 92c 7, π.β. Γ. Κουμάκης, 2013). Τὰ τρίγωνα εἶναι στοιχεῖα τῶν σχημάτων (*Τίμ.*, 54d 6), τὰ ὁποῖα μὲ τὴ σειρά τους εἶναι στοιχεῖα τῶν σωμάτων (*Τίμ.*, 56b 5), ἐνῷ τὰ σώματα δὲν εἶναι στοιχεῖα τοῦ παντὸς (*Τίμ.*, 48 b – c). Τὸ τρίγωνο εἶναι τὸ ἔσχατο, δηλαδὴ τὸ ἐλάχιστο γεωμετρικὸ σχῆμα, στὸ ὁποῖο ὁ μαθηματικὸς θὰ σταματήσει τὴ διαίρεση τῶν σχημάτων (*Ἠθ. Νικ.*, Ζ 8 1142a 28-29). Εἶναι συνεπῶς ἄτμητο καὶ ἀδιαίρετο ὡς πρὸς τὸ εἶδος. Ὁ Νικόμαχος ὁ Γερασηνὸς (1866: B a) δίνοντας τὸν ὁρισμὸ τοῦ στοιχείου λέγει ὅτι στοιχεῖο εἶναι ἐκεῖνο, ἀπὸ τὸ ὁποῖο ὡς ἐλάχιστον συνίσταται κάτι, καὶ εἰς τὸ ὁποῖο ὡς ἐλάχιστο ἀναλύεται. Λέγει ἐπίσης (B ζ΄) ὅτι τὸ τρίγωνο εἶναι ἀρχικώτατον καὶ στοιχειωδέστατον σχῆμα, διότι, ἐὰν ἀπὸ τῶν γωνιῶν ἀχθοῦν εὐθεῖες πρὸς τὸ μέσον του σχήματος, αὐτὸ ἀναλύεται σὲ τόσα τρίγωνα ὅσες τυχαίνει νὰ εἶναι οἱ πλευρές. Ἂν τὸ ἴδιο πρᾶγμα γίνει στὸ τρίγωνο, αὐτὸ δὲν θὰ μεταπέσει σὲ ἄλλο σχῆμα ἀλλὰ στὸν ἑαυτό του. Ὁ Ἀριστοτέλης δίνοντας τὸν ὁρισμὸ τοῦ στοιχείου λέγει ὅτι στοιχεῖο εἶναι τὸ πρῶτο ἐνυπάρχον, ποὺ εἶναι ἀδιαίρετο σὲ ἄλλο εἶδος (*Μ.τ.φ.*, Β 3, 999a 1-5, Δ 3, 1014a 26-30). Ὁ Πλάτων (*Τίμ.*, 82a 1-2, *Παρμ.*, 130c 1-2) ὡς πρὸς τὴ σχέση τοῦ στοιχείου καὶ τοῦ ἀνθρώπινου σώματος ἀκολουθεῖ τὴν ἄποψη τοῦ Ἐμπεδοκλῆ, ὁ ὁποῖος δέχεται ὅτι τὸ πῦρ, ὁ ἀέρας, τὸ νερὸ καὶ ἡ γῆ εἶναι τὰ στοιχεῖα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα σύγκειται τὸ ἀνθρώπινο σῶμα, κατ’ ἀντίθεση πρὸς τὸν Ἀναξαγόρα, ὁ ὁποῖος πιστεύει τὸ

ISBN: 978-618-82935-0-2

ἀκριβῶς ἀντίθετο, ὅτι δηλαδὴ τὸ πῦρ, ὁ ἀέρας καὶ τὰ ἄλλα σώματα εἶναι μείγματα τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος, τὰ μέρη τοῦ ὁποίου, εἶναι στοιχεῖα αὐτῶν, ἐπειδὴ εἶναι ὁμοιομερῆ (H. Diels – W. Kranz, Κύρκος, I 2005: B 72 a σ. 582, II 2007: B 43a, σ. 43).

Τέσσερα εἶναι τὰ κάλλιστα ὀρθογώνια, μὲ τὰ ὁποῖα δομεῖται ὁ κόσμος κατὰ Πλάτωνα. Τὸ πρῶτο, ποὺ ἀποκαλεῖται ἀπὸ τὸν ἴδιο κάλλιστο, εἶναι τὸ ἥμισυ ἰσοπλεύρου τριγώνου, δηλαδὴ ἐκεῖνο ποὺ ἔχει γωνίες 30, 60 καὶ 90 μοιρῶν ἢ ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν ὑποτείνουσα εἶναι ὡς πρὸς τὸ μῆκος διπλάσια ἀπὸ τὴ μικρότερη κάθετη πλευρά, ἡ δὲ μεγαλύτερη κάθετη πλευρὰ εἶναι πρὸς τὴ μικρότερη τριπλῆ κατὰ δύναμη (*Τίμ.*, 54b 4-5). Τὰ ὑπόλοιπα τρία οἴκοθεν ἐννοεῖται ὅτι εἶναι κάλλιστα, ἀφοῦ χρησιμεύουν στὴ σύσταση τῶν πέντε καλλίστων σωμάτων. Τὸ δεύτερο κάλλιστο τρίγωνο εἶναι τὸ ὀρθογώνιο ἰσοσκελὲς (*Τίμ.*, 54α, 55bc), δηλαδὴ τὸ ἡμιτετράγωνο. Τὸ τρίτο εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖο μνημονεύει ὁ Πλάτων στὴν *Πολιτεία* (546b κ.ε.), γιὰ νὰ δείξει τὴ θεία καὶ τὴν ἀνθρώπινη γέννηση, δηλαδὴ τοῦ ἀνθρώπου καὶ τοῦ κόσμου. Ἡ σχέση τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 3, 4, 5, οἱ δὲ γωνίες 36, 54 καὶ 90 μοιρῶν, τὸ ὁποῖο ἀποκαλεῖται ζωογονικὸ ἢ κοσμικὸ ἢ Πυθαγορικὸ τρίγωνο (Proclus 1901: 43). Πρέπει ἐδῶ νὰ σημειωθεῖ ὅτι ἡ ἀνεύρεση τῶν δύο καλλίστων τριγώνων, μὲ τὰ ὁποῖα ὡς στοιχεῖα συντίθεται τὸ δωδεκάεδρο, εἶναι προϊὸν δικῶν μου συλλογισμῶν καὶ ἀτομικῆς μου εὐθύνης σὲ συνεργασία μὲ μαθηματικούς, οἱ ὁποῖοι ἔκαμαν μὲ δικές μου ὁδηγίες τὶς ἀποδείξεις, πρᾶγμα ποὺ παρουσιάζεται τώρα γιὰ πρώτη φορά. Ἡ ἐπικρατέστερη ἀντίληψη γιὰ τὸ τρίτο εἶδος τοῦ τριγώνου, ποὺ συγκροτεῖ τὸ δωδεκάεδρο, τὸ ὁποῖο συμβολίζει τὸν κόσμο, εἶναι ὅτι αὐτὸ εἶναι τὸ χρυσὸ τρίγωνο, δηλαδὴ τὸ ἰσοσκελὲς μὲ γωνία κορυφῆς 36 καὶ βάσεων 72^o, 72^o, δηλαδὴ τοῦ διπλάσιου (Th. Heath, 1921: 296-7, 1931: 176-7, 1956: 98-99). Ἡ ἀντίληψη ὅμως αὐτή, ὅπως θὰ δείξουμε στὰ ἑπόμενα δὲν εὐσταθεῖ. Τὸ τέταρτο κάλλιστο τρίγωνο, μὲ τὸ ὁποῖο δομεῖται ὁ κόσμος, εἶναι τὸ ἥμισύ του χρυσοῦ τριγώνου μὲ γωνίες 18, 72, 90.

Μὲ τὸ πρῶτο κάλλιστο τρίγωνο, δηλαδὴ τὸ ἡμιτρίγωνο ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἂν τοποθετηθεῖ ἀνὰ δύο χιαστί, σχηματίζονται τὰ τρία κανονικὰ κυρτὰ πολύεδρα, δηλαδὴ τὸ τετράεδρο ἢ πυραμίδα, τὸ ὀκτάεδρο καὶ τὸ εἰκοσάεδρο, ἀπὸ τὰ ὁποῖα γεννῶνται τὸ πῦρ, ὁ ἀέρας καὶ τὸ νερὸ ἀντίστοιχα, ἀφοῦ εἶναι τὰ στοιχεῖα τοὺς (*Τίμ.*, 55a – c, 56b 5). Ἀπὸ τὸ δεύτερο κάλλιστο τρίγωνο, δηλαδὴ τὸ ὀρθογώνιο ἰσοσκελές, σχηματίζεται τὸ ἑξάεδρο ἢ ὁ κύβος, ἀπὸ τὸ ὁποῖο γεννᾶται ἡ γῆ (*Τιμ.*, 55b 4-5). Ὁ Πλούταρχος παραδίδει ὅτι κατὰ τὸν Πυθαγόρα ἀπὸ τὰ 5 σχήματα, τὰ ὁποῖα λέγονται καὶ μαθηματικά, γεννῶνται τὰ 5 σώματα καὶ ἑπομένως ἡ ἰδέα αὐτὴ εἶναι Πυθαγορικὴς προέλευσης (887 b-c, Εὐσέβιος, *Ἐκκλησιαστ. Προπαρασκευὴ* 15. 37. 6. 1) Οἱ βάσεις τῶν τριῶν πρώτων σωμάτων εἶναι τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο, τὸ ὁποῖο συνίσταται ἀπὸ ἕξι ἴσα καὶ ὅμοια ἡμιτρίγωνα ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐνῷ οἱ βάσεις τῆς γῆς, ἀπὸ τέσσερα ἴσα καὶ ὅμοια ἰσοσκελῆ ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἑπομένως ἡ πυραμίδα σύγκειται ἀπὸ 24 (= 4 (6), τὸ ὀκτάεδρο ἀπὸ 48 (= 8 (6) καὶ τὸ εἰκοσάεδρο ἀπὸ 120 (= 20 (6) ἡμιτρίγωνα ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐνῷ τὸ ἑξάεδρο ἢ ὁ κύβος ἀπὸ 24 (= 6 (4) ἡμιτετράγωνα, δηλαδὴ ὀρθογώνια ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Τὸ δωδεκάεδρο, ποὺ ἀπεικονίζει τὸν ὁρατὸ κόσμο, ὁ ὁποῖος μὲ τὴ σειρὰ τοῦ εἶναι εἰκόνα τοῦ νοητοῦ (*Τιμ.*, 92c 7), δὲν ἀναφέρεται ρητὰ καθόλου ἀπὸ τὸν ἴδιο τὸν Πλάτωνα, παρὰ μόνον ἀπὸ μεταγενέστερους καὶ συγκεκριμένα ἀπὸ τὸν Τίμαιο τὸν Λοκρὸ (98d) καὶ τοὺς σχολιαστὲς τοῦ Πλάτωνα, ὅπως π.χ. ἀπὸ τὸν Ἀλκίνοο (H XIII, 168 – 169, 31) ἢ Ἀλμπίνο (75) καὶ τὸν Πλούταρχο (1003c), οἱ ὁποῖοι ἰσχυρίζονται ὅτι τὸ δωδεκάεδρο σύγκειται ἀπὸ 360 πρῶτα τρίγωνα. Ὁ ἴδιος ὁ Πλάτων τὸ ὑπαινίσσεται στὸν *Τίμαιο* (55c 4 – 6) κάνοντας λόγο γιὰ μιὰ πέμπτη σύσταση.

Ἡ κατασκευὴ καὶ ἑρμηνεία τοῦ δωδεκαέδρου παρουσιάζει δυσεπίλυτα προ-

ISBN: 978-618-82935-0-2

βλήματα καὶ ἀρκετὲς δυσχέρειες στὴν κατανόηση. Μέχρι σήμερα δὲν ὑπάρχει ὁμοφωνία ἢ μᾶλλον ἐπικρατεῖ πλήρης ἄγνοια γιὰ τὸ ποιὰ εἶναι τὰ στοιχεῖα, δηλαδὴ τὰ τρίγωνα ἀπὸ τὰ ὁποῖα αὐτὸ συγκροτεῖται. Λένε γιὰ παράδειγμα ὅτι ἡ ἀναφορὰ τοῦ δωδεκαέδρου εἶναι ἐντελῶς περιττὴ καὶ ἄχρηστη, ἀφοῦ ὑπάρχουν τὰ τέσσερα κάλλιστα σώματα καὶ ὅτι ἡ προσφυγὴ στὰ τρίγωνα γιὰ τὴ σύνθεσή του εἶναι «ἀδύνατη ἢ δυσχερέστατη» (Κάλφας 1997: 441 σήμ. 337). Τὰ στοιχεῖα δὲ τοῦ δωδεκαέδρου, δηλαδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, ἀπὸ τὸ ὁποῖο αὐτὸ ἀποτελεῖται, εἶναι ἄγνωστα μέχρι σήμερα. Μὲ τὴν παροῦσα εἰσήγηση θὰ ἤθελα νὰ ἀνακοινώσω ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ δωδεκάεδρου εἶναι συνδυασμὸς δύο εἰδῶν τριγώνων, παρόλο ποὺ καὶ τὰ δύο εἶναι ἡμιτρίγωνα ἰσοσκελῶν τριγώνων: ἑνὸς μὲ σχέση πλευρῶν 3, 4, 5 ὡς πρὸς τὸ μῆκος, ποὺ ἔχει γωνίες 36, 54, 90, καὶ ἑνὸς ἄλλου μὲ γωνίες 18, 72 καὶ 90 μοιρῶν. Στὴν μὲν πρώτη περίπτωση πρόκειται γιὰ τὸ ἡμιτρίγωνο ἑνὸς ἐκ τῶν πέντε ἰσοσκελῶν τριγώνων τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου μὲ ἐπίκεντρη γωνία 72^{o} καὶ παρὰ τὴ βάση 54^{o} καὶ 54^{o}, στὴ δὲ δεύτερη ἔχουμε τὸ ἡμιτρίγωνο τοῦ χρυσοῦ τριγώνου μὲ γωνίες 36^{o}, 72^{o} καὶ 72^{o}. Ἑπομένως πρόκειται γιὰ τὸ ἡμιτρίγωνο μὲ γωνίες 18^{o}, 72^{o} καὶ 90^{o}. Οἱ πλευρὲς τοῦ χρυσοῦ αὐτοῦ τριγώνου ἔχουν τὴ σχέση τοῦ ἄκρου καὶ μέσου λόγου, δηλαδὴ τῆς χρυσῆς τομῆς ὅπως ἀπέδειξε μᾶλλον ὁ Θεαίτητος (Fr. Lassere 1964, 76) στὸ πεντάγωνο, διότι ἕνα τέτοιο τρίγωνο ἔχει πλευρὲς τὴ διαγώνιο καὶ τὴν πλευρὰ τοῦ πενταγώνου. Ἀντίθετα, ὁ Πρόκλος (1873: 419, Th. Heath 1956:99) ὑποστηρίζει ὅτι εἶναι Πυθαγορικῆς προέλευσης. Τὸ τρίγωνο αὐτὸ σχηματίζεται μὲ κορυφὴ τὴν ἐπίκεντρη γωνία τοῦ πενταγώνου καὶ βάση τὴν πλευρὰ του (Εὐκλείδης, Δ, ΙΑ, M. Livio, 2005, 118 - 20).

Τὸ ἐρώτημα ποὺ προβάλλει τώρα εἶναι νὰ μάθουμε πῶς δημιουργοῦνται τὰ τρίγωνα αὐτὰ καὶ πόσα εἶναι. Ἂν ἑνώσουμε τὸ κέντρο τοῦ πενταγώνου, τὸ ὁποῖο ἀποτελεῖ τὴ βάση τοῦ δωδεκαέδρου, μὲ τὶς πέντε γωνίες του, τότε σχηματίζο-

ISBN: 978-618-82935-0-2

νται πέντε ἰσοσκελῆ τρίγωνα μὲ γωνίες κορυφῆς 72^o, δηλαδὴ μία ὀρθὴ παρὰ ἕνα πέμπτο καὶ βάσεων τὰ 3/5 τῆς ὀρθῆς, δηλαδὴ 54^o καὶ 54^o. Ἡ γωνία τῶν 72^o προκύπτει ἂν διαιρέσουμε τὶς 360^o, δηλαδὴ τὶς τέσσερις ὀρθές, διὰ τοῦ πέντε, διότι τόσα εἶναι τὰ τρίγωνα, ποὺ καλύπτουν ὁλόκληρη τὴν ἐπιφάνεια τοῦ πενταγώνου. Κάθε γωνία τοῦ πενταγώνου εἶναι 108^o δηλαδὴ μιὰ ὀρθὴ καὶ ἕνα πέμπτο σύμφωνα μὲ τὸν μαθηματικὸ τύπο 180^o(ν – 2), ὅπου ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πενταγώνου, καὶ στὴ συγκεκριμένη περίπτωση εἶναι πέντε. Αὐτὸ ἔχει ἀποδειχθεῖ κατ' ἄλλο τρόπον ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη (XIII, ΙΗ, λῆμμα). Ἔτσι ἔχουμε (180^o (3) : 5 = 540 : 5 =108, πρᾶγμα ποὺ ἀναφέρει καὶ ὁ Πλούταρχος (1003 D). Ἐπειδὴ ὅμως οἱ πλευρὲς τοῦ προαναφερθέντος τριγώνου εἶναι ταυτόχρονα καὶ διχοτόμοι των γωνιῶν, διότι εἶναι καὶ διάμεσοι τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ πενταγώνου, προκύπτει ὅτι οἱ παρὰ τὴν βάση γωνίες τοῦ τριγώνου αὐτοῦ εἶναι 54^o. Ἀφοῦ τὸ κάθε πεντάγωνο σύγκειται ἀπὸ πέντε τέτοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ἕπεται ὅτι τὸ δωδεκάεδρο περιέχει 60 (= 5 X 12), γιὰ νὰ καλυφθεῖ ὅλη ἡ ἐπιφάνειά του, ὅπως ἀποδεικνύεται ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη στὸ ἀνωτέρω λῆμμα. Αὐτὰ εἶναι τὸ ἡμιτρίγωνο τοῦ ἰσοσκελοῦς αὐτοῦ τριγώνου μὲ σχέση πλευρῶν 3, 4, 5 καὶ γωνίες 36^o, 54^o καὶ 90^o. Συνεπῶς τὸ διπλάσιο τοῦ ἰσοσκελοῦς αὐτοῦ τριγώνου, ποὺ ἐμπεριέχεται στὸ τετράγωνο, τὸ ὁποῖο σχηματίζεται ἀπὸ μιὰ πλευρὰ καὶ τὴν κάθετο σ' αὐτή, εἶναι ἴσο μὲ τὸ τριακονταπλάσιο τὴ ἐπιφάνειας τοῦ δωδεκαέδρου κατὰ τὸν Ὑψικλῆ (Εὐ. Σπανδάγος 2002, 43 – 44).

Τὸ ἰσοσκελὲς αὐτὸ τρίγωνο του πενταγώνου ὑποδιαιρεῖται σὲ δύο ἡμιτρίγωνα μὲ σχέση πλευρῶν 3, 4, 5. Ἄρα τὸ δωδεκάεδρο θὰ περιεῖχε 2 X 5 X 12 = 120 τρίγωνα, ποὺ θὰ ἦταν τὰ στοιχεῖα του. Αὐτὸ ὅμως δὲν ἀνταποκρίνεται πρὸς τὴν ἀλήθεια, διότι τὸ ἰσοσκελὲς αὐτὸ τρίγωνο διαιρεῖται κατὰ τοὺς ἀρχαίους σχολιαστὲς Πλούταρχο καὶ Ἀλκίνοο σὲ ἕξι πρῶτα, δηλαδὴ ὀρθογώνια τρίγωνα, ἐνῷ μὲ τὴ διαίρεση αὐτὴ τὸ ἰσοσκελὲς θὰ ἀποτελοῦνταν μόνο ἀπὸ δύο πρῶτα,

ISBN: 978-618-82935-0-2

δηλαδὴ ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἡ διαίρεση αὐτὴ τῶν σχολιαστῶν προκύπτει κατ' ἀναλογία ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου δὲν εἶναι δύο ἀλλὰ ἕξι (*Τίμ*., 54c 2. Πβ. Γ. Κουμάκης 2014). Μὲ βάση τὸν ἀριθμὸ αὐτὸν ἀναφέρει ὁ Πλάτων ὅτι ἡ πυραμίδα ἀποτελεῖται ἀπὸ 24, τὸ ὀκτάεδρο ἀπὸ 48 καὶ τὸ εἰκοσάεδρο ἀπὸ 120 κάλλιστα τρίγωνα (*Τιμ*., 55 a – b). Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὸ ὀρθογώνιο ἰσοσκελές. Τὸ τετράγωνο τῆς βάσης τοῦ κύβου δὲν σύγκειται ἀπὸ δύο ἀλλὰ ἀπὸ τέσσερα τρίγωνα, διότι τέσσερα εἶναι τὰ στοιχεῖα του. Γι' αὐτὸ ὁ κύβος κατὰ δήλωση τοῦ Πλάτωνα ἀπαρτίζεται ἀπὸ 24 καὶ ὄχι 12 ὀρθογώνια τρίγωνα, ἐπειδὴ μόνον μὲ τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν μποροῦν νὰ χαρακτηριστοῦν στοιχεῖα τοῦ τετραγώνου καὶ κατ' ἀκολουθίαν τοῦ κύβου ὅπως καὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου (*Τίμαιος Λοκρὸς*, 35. 98 c – d) καὶ κατὰ συνέπειαν τῶν τριῶν ἄλλων σωμάτων ἀντίστοιχα. Τὸ ἴδιο ἀκριβῶς συμβαίνει καὶ μὲ τὸ δωδεκάεδρο. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ ἡμιτρίγωνο καὶ τὸ ἡμιτετράγωνο εἶναι στοιχεῖα. Συνεπῶς, τὸ καθένα ἀπὸ τὰ πέντε ἰσοσκελῆ τρίγωνα μὲ γωνίες 72^o, 54^o καὶ 54^o δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρεῖται μόνο σὲ δύο ἡμιτρίγωνα μὲ γωνίες 36o, 54o καὶ 90o, τὰ ὁποῖα θὰ ἀποτελοῦσαν τὰ στοιχεῖα τοῦ δωδεκάεδρου, διότι τότε αὐτὸ θὰ ἀποτελοῦνταν συνολικὰ ἀπὸ 120 τέτοια τρίγωνα, πρᾶγμα ποὺ ἀντιβαίνει στὶς μαρτυρίες τόσο τοῦ Πλουτάρχου ὅσο καὶ τοῦ Ἀλμπίνου ἢ Ἀλκίνοου, οἱ ὁποῖοι ἐπιβεβαιώνουν – ὅπως εἴδαμε – ὅτι τὸ δωδεκάεδρο συντίθεται ἀπὸ 360 τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ δωδεκαέδρου.

Γιὰ νὰ ἰσχυριστοῦμε λοιπὸν ὅτι τὸ δωδεκάεδρο σύγκειται ἀπὸ 120 καὶ ὄχι ἀπὸ 360 στοιχειώδη τρίγωνα, πρέπει πρῶτα νὰ ἀποδείξουμε ὅτι οἱ μαρτυρίες τῶν σχολιαστῶν αὐτῶν τοῦ *Τιμαίου* τοῦ Πλάτωνος εἶναι λανθασμένες.

Μέχρις ὅτου δηλαδὴ φέρουμε πειστικὰ ἐπιχειρήματα γιὰ τὴν ἀναίρεση τῶν θέσεών τους, πρέπει νὰ εἴμαστε ἐπιφυλακτικοὶ στὸ πρόβλημα αὐτό. Ἐκτὸς ὅμως ἀπὸ τὸ ἐμπόδιό του ἀριθμοῦ τῶν στοιχείων τοῦ δωδεκαέδρου, τὰ ὁποῖα κατὰ τὶς

ISBN: 978-618-82935-0-2

ἀνωτέρω μαρτυρίες καὶ ἐκτιμήσεις πρέπει νὰ εἶναι 360 καὶ ὄχι 120, ὑφίσταται κὰ ἕνα ἄλλο ἐπίσης σοβαρὸ καὶ σπουδαῖο κώλυμα νὰ ἀσπαστοῦμε τὴν ἑρμηνεία αὐτή. Εἶναι ἡ δήλωση τοῦ Πλουτάρχου ὅτι στὸ ἡμιτρίγωνο αὐτὸ τοῦ δωδεκαέδρου μὲ σχέση πλευρῶν 3, 4, 5, ἡ ὄρθια πλευρὰ τοῦ τριγώνου εἶναι 3, ἡ βάση 4 καὶ σὲ κάθε περίπτωση ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 5. Ἐὰν χωρίσουμε τὸ ἀνωτέρω ἰσοσκελὲς τρίγωνο τοῦ πενταγώνου μόνον σὲ δύο ἡμιτρίγωνα, ὥστε ὁλόκληρό το δωδεκάεδρο νὰ ἀποτελεῖται μόνο ἀπὸ 120 στοιχεῖα, τότε ἡ ὄρθια πλευρὰ κατ' ἀνάγκην εἶναι 4 καὶ ἡ βάση τρία. Πρόκειται συνεπῶς γιὰ μιὰ διάταξη, ἡ ὁποία εἶναι ἀντίθετη ἀπὸ αὐτήν, ποὺ παραδίδει ὁ Πλούταρχος, ὁ ὁποῖος θέλει ἡ βάση νὰ εἶναι ἡ μεγαλύτερη κάθετη πλευρά, δηλαδὴ 4 καὶ ὄρθια πλευρὰ τρία (Πλούταρχος 373F – 374A). Ἄρα, ἡ ἐνδεχόμενη αὐτὴ ἑρμηνεία ἀποδεικνύεται ἀνεδαφικὴ καὶ λανθασμένη. Τὸ σπουδαιότερο ὡστόσο ἐπιχείρημα εἶναι τὰ κείμενα τοῦ ἴδιου του Πλάτωνα, ὁ ὁποῖος θέλει τὴ διαίρεση τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου σὲ ἕξι σκαληνὰ καὶ πιὸ συγκεκριμένα, ἡμιτρίγωνα ἰσοπλεύρου τριγώνου. Ὁ μαθηματικὸς Th. Heath ὑποστηρίζει ὀρθὰ κατὰ τὴν ἀντίληψή μου ὅτι ἡ σύνθεση τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀπὸ 6 καὶ ὄχι ἀπὸ 2 εἶναι Πυθαγορικῆς προέλευσης. Ἐπικαλεῖται συγκεκριμένα τὸν Πρόκλο, ὁ ὁποῖος λέγει ὅτι ὑπάρχει ἕνα θεώρημα τῶν Πυθαγορείων, σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖο, ἂν ληφθοῦν ἕξι ἰσόπλευρα τρίγωνα ἢ τέσσερα τετράγωνα ἢ τρία ἑξάγωνα, συμπληρώνεται ὅλος ὁ τόπος γύρω ἀπὸ ἕνα σημεῖο, ποὺ εἶναι τέσσερεις ὀρθὲς, δηλαδὴ 360 μοῖρες, διότι ἡ γωνία τοῦ μὲν ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 60, τοῦ τετραγώνου 90 καὶ τοῦ ἑξαγώνου 120. Κατὰ συνέπεια σὲ ὅλες τὶς περιπτώσεις συμπληρώνονται οἱ τέσσερεις ὀρθὲς γωνίες (Πρόκλος, 1873: 304-305). Τὸ θεώρημα αὐτὸ μνημονεύεται καὶ ἀπὸ τὸν Ἀριστοτέλη (*Περὶ οὐρανοῦ,* Γ 7, 306 b 3-8) καὶ τὸν Πάππο τὸν Ἀλεξανδρέα στὴν ἀρχὴ τοῦ Ε βιβλίου (Fr. Hultsch, 1878, Εὐ. Σπανδάγος 2004:14).

Ἐδῶ ὅμως δημιουργεῖται ἕνα πρόβλημα, τὸ ὁποῖο θὰ πρέπει νὰ

ISBN: 978-618-82935-0-2

ἀντιμετωπιστεῖ. Συγκεκριμένα, μὲ βάση τὸ σκεπτικὸ αὐτὸ τῆς συμπλήρωσης τοῦ τόπου, δηλαδὴ τῶν 360 μοιρῶν, θὰ ἔπρεπε κατ' ἀναλογία καὶ μὲ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο μὲ γωνίες 72, 54, 54, νὰ μποροῦσε ἐπίσης νὰ συμπληρωθοῦν οἱ 360 μοῖρες. Σύμφωνα ὅμως μὲ τὸ παραπάνω θεώρημα δὲν ὑπάρχει ἄλλο σχῆμα ἐκτὸς ἀπὸ τὰ τρία αὐτά, καθένα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβανόμενο νὰ συμπληρώνει ὅλον τὸν τόπο. Εἶναι ὡστόσο δυνατὸν κάθε μία ἀπὸ τὶς γωνίες του ἐπαναλαμβανόμενη εἴτε μόνη της εἴτε μὲ ὑποπολλαπλάσιό της νὰ συμπληρώσει ὅλον τὸν τόπο τῶν 360 μοιρῶν. Ἔτσι ἡ γωνία 72 μοιρῶν τῆς κορυφῆς, ἂν ἐπαναληφθεῖ 5 φορές, συμπληρώνει τὸ ζητούμενο, ἀφοῦ 72X5=360. Τὸ ἴδιο συμβαίνει, ἂν ἐπαναληφθεῖ ἡ παρὰ τὴ βάση γωνία τῶν 54 μοιρῶν ἕξι φορὲς καὶ τὰ 2/3 ἢ τὰ 6/10 αὐτῆς, δηλαδὴ γωνία 36 μοιρῶν. Ἔχουμε δηλαδὴ 54X6+36= 324+36 =360. Ἡ ἑξάδα ὅμως, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὴ βάση τῆς ἁρμονίας, συμβολίζει τὴ ψυχὴ (Ἰάμβλιχος 1922:43, 45, 47). Στὸν *Φαίδωνα* (94b) ἐπίσης ἡ ψυχὴ ὁρίζεται ὡς ἁρμονία. Κατὰ τὸν Ἰάμβλιχο (1922:14, 14-19) ἡ ψυχὴ χωρίζεται σὲ τρία διαστήματα, καθένα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἔχει δύο πέρατα. Ἀπὸ αὐτὸ ἐξάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι ἡ ψυχὴ συνίσταται ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 6. Βλέπομε ἐδῶ ὅτι ὁ τρόπος σχηματισμοῦ τῆς ἑξάδας τῆς ψυχῆς συμπίπτει ἀπόλυτα μὲ τὸν τρόπο σύνθεσης τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου 3X2=6 (*Τίμ.*, 54 d). Ἀπὸ τὴ στιγμὴ λοιπὸν ποὺ εἶναι δεδομένο ὅτι τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο διαιρεῖται σὲ ἕξι πρῶτα τρίγωνα, πρέπει τὸ ἴδιο νὰ συμβαίνει καὶ μὲ τὸ ἰσοσκελές. Ὀφείλομε συνεπῶς νὰ ἀναζητήσουμε ἄλλον τρόπο διαίρεσης, μὲ τὸν ὁποῖο ἐνδεχομένως θὰ δημιουργηθοῦν καὶ ἄλλα τρίγωνα ὡς στοιχεῖα τοῦ δωδεκαέδρου. Μὲ βάση ἕναν ἁπλὸ συλλογισμὸ πρέπει νὰ ἀναμένουμε ὅτι τὸ δωδεκάεδρο πρέπει νὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο καὶ ὄχι ἀπὸ ἕνα εἶδος στοιχείων, ἐπειδὴ τὰ τέσσερα σχήματα, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ κάλλιστα σώματα, ἀποτελοῦνται ἀπὸ δύο διαφορετικὰ εἴδη τριγώνων, καὶ συγκεκριμένα ἀφενὸς μὲν ἀπὸ τὸ ἡμιτρίγωνο ἰσοπλεύρου

ISBN: 978-618-82935-0-2

τριγώνου, ἀφετέρου δὲ τὸ ἡμιτετράγωνο. Στὸ δωδεκάεδρο βέβαια, ὅπως θὰ δοῦμε, δὲν χρησιμοποιεῖται κανένα ἀπὸ αὐτὰ τὰ τρίγωνα, ἀλλὰ δύο διαφορετικὰ εἴδη ἡμιτριγώνων. Τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ ἡμιτρίγωνο ἰσοσκελοῦς τριγώνου μὲ γωνίες 72^o, 54^o καὶ 54^o, τὸ δὲ ἄλλο εἶναι τὸ ἡμιτρίγωνο τοῦ χρυσοῦ τριγώνου μὲ γωνίες 36^o, 72^o καὶ 72^o, στὸ ὁποῖο οἱ παρὰ τὴ βάση γωνίες εἶναι διπλάσιες ἀπὸ ἐκείνη τῆς κορυφῆς. Οἱ δύο πλευρὲς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ βρίσκονται σὲ λόγο τῆς χρυσῆς τομῆς.

Τὸ ἐρώτημα εἶναι τώρα πῶς δημιουργοῦνται τὰ ἕξι αὐτὰ τρίγωνα, ποὺ εἶναι στοιχεῖα τοῦ δωδεκαέδρου. Ἂν σὲ ἕνα ἀπὸ τὰ πέντε ἰσοσκελῆ τρίγωνά του πενταγώνου μὲ γωνίες 72^o, 54^o, 54^o φέρουμε τὰ τρία ὕψη, τότε σχηματίζονται ἕξι τρίγωνα μὲ τὶς ἰδιότητες ποὺ εἴπαμε παραπάνω, δηλαδὴ τέσσερα ἡμιτρίγωνά του ἰσοσκελοῦς αὐτοῦ τριγώνου, τὰ ὁποῖα ἔχουν γωνίες 36^o, 54^o, 90^o ἀνὰ δύο ἴσα καὶ ὅμοια, ἀλλὰ ἄνισα πρὸς τὰ ἄλλα δύο καὶ μάλιστα μὲ λόγο 3, 618. Σχηματίζονται ἐπίσης δύο ἴσα καὶ ὅμοια ἡμιτρίγωνα του χρυσοῦ τριγώνου μὲ γωνίες 18^o, 72^o, 90^o. Τὸ τρίγωνο αὐτὸ ὡς πρὸς τὸ μικρότερο ἄλλο ἡμιτρίγωνο ἔχει λόγο 2, 22 καὶ ὡς πρὸς τὸ μεγαλύτερο 1, 618 δηλαδὴ τοῦ ἄκρου καὶ μέσου λόγου, μὲ ἄλλα λόγια τῆς χρυσῆς τομῆς. Τὰ ὕψη ὅμως τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ποὺ σχηματίζεται ἀκτινωτὰ μὲ πλευρὲς ἀπὸ τὸ κέντρο πρὸς τὶς γωνίες τοῦ πενταγώνου, συμπίπτουν μὲ τὶς διαγώνιες τοῦ ἴδιου. Τὰ στοιχεῖα λοιπόν, ἀπὸ τὰ ὁποῖα συντίθεται τὸ δωδεκάεδρο εἶναι 360 ὀρθογώνια ἡμιτρίγωνα, τὰ ὁποῖα λέγονται καὶ πρῶτα ἢ ἀρχοειδή, ἐπειδὴ ἀπὸ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὸ σκαληνὸ καὶ τὸ ἰσοσκελές, σχηματίζονται ὅλα τα τρίγωνα καὶ ἑπομένως καὶ τὰ ἐπίπεδα σχήματα κατὰ Πλάτωνα (*Τίμ.*, 53 c8 – d3: «τὰ δὲ τρίγωνα πάντα ἐκ δυοῖν ἄρχεται τριγώνοιν, μίαν μὲν ὀρθὴν ἔχοντος ἑκατέρου γωνίαν, τὰς δὲ ὀξείας»). Οἱ ἀποδείξεις παρατίθενται ἀπὸ μαθηματικοὺς στὰ σχεδιαγράμματα.

Τὸ μαθηματικὸ αὐτὸ συμπέρασμα συμπίπτει ἀπόλυτα – ὅπως εἴδαμε – μὲ τὴ

ISBN: 978-618-82935-0-2

μαρτυρία τοῦ Πλουτάρχου – ὁ ὁποῖος λέγει (1003D) ὅτι τὸ δωδεκάεδρο εἶναι συναρμοσμένο ἀπὸ δώδεκα πεντάγωνα ἰσογώνια καὶ ἰσόπλευρα, ἕκαστον τῶν ὁποίων συνίσταται ἀπὸ τριάντα πρῶτα σκαληνὰ τρίγωνα. Ἀναγκαῖο ἐπακόλουθο τῆς διαπίστωσης αὐτῆς τοῦ Πλουτάρχου εἶναι ὅτι τὸ δωδεκάεδρο σύγκειται ἀπὸ 360 τρίγωνα, ἀφοῦ αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ δώδεκα πεντάγωνα 360 = 30 (12. Μὲ βάση τὸν σιωπηρὸ αὐτὸν συλλογισμὸ ὁ Πλούταρχος προβαίνει ἐν συνεχείᾳ στὴ δήλωση ὅτι ἡ σύνθεση τοῦ κόσμου ἀπὸ 360 τρίγωνα εἶναι ἀπομίμηση τοῦ ζωδιακοῦ κύκλου καὶ ταυτόχρονα τοῦ ἔτους, διότι καὶ στὶς δύο περιπτώσεις ἔχουμε τὸν ἀριθμὸ 12, ὁ ὁποῖος ὑποδιαιρεῖται σὲ 30 μέρη (1003D). Πράγματι ὁ ζῳδιακὸς κύκλος διαιρεῖται σὲ 12 ζώδια, δηλαδὴ μέρη, καὶ τὸ κάθε ζώδιο ἔχει 30 μοῖρες. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ ἔτος ἔχει 12 μῆνες καὶ κάθε μῆνας ἔχει 30 μέρες. Κατὰ τὸν Διογένη τὸ Λαέρτιο (I, 27) ὁ Θαλῆς βρῆκε τὶς ἐποχὲς καὶ τοὺς μῆνες τοῦ ἔτους, τὸ ὁποῖο διαίρεσε σὲ 365 ἡμέρες.Ὁ Πλούταρχος ὀνομάζει τὰ 24 τρίγωνα τῆς πυραμίδας ἐπίσης πρῶτα (32, 427α). Ἀπ' αὐτὸ θὰ μποροῦσε νὰ συμπεράνει κανεὶς ὅτι ὅλα τα ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι πρῶτα. Ἡ ἰδέα αὐτὴ τῆς ἀπομίμησης τῆς μαθηματικῆς δομῆς τοῦ κόσμου (μὲ τὰ 360 τρίγωνα τοῦ δωδεκαέδρου) του ζωδιακοῦ κύκλου τονίζεται ἐπίσης ἀπὸ τὸν Ἀλμπίνο στὴν *Ἐπιτομή* του (77) ἢ κατ' ἄλλην παραλλαγὴ ἀπὸ τὸν Ἀλκίνοο στὸν Διδασκαλικόν του (XIII, 169). Εὔστοχα ἔχει παρατηρηθεῖ ἀπὸ τοὺς σχολιαστὲς ὅτι ὁ παραλληλισμὸς καὶ ἡ συσχέτιση τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸν ζῳδιακὸ κύκλο καὶ τὸν ἐνιαυτὸν εἶναι ἁπλῶς ἀριθμητικὸς (H. Cherniss 1976, 55). Αὐτὸ ποὺ δηλώνει ἐδῶ ὁ Πλούταρχος εἶναι ὅτι τὰ 360 τρίγωνα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα συντίθεται τὸ δωδεκάεδρο, εἶναι πρῶτα καὶ σκαληνά. Ὁ ὅρος «πρῶτα» σημαίνει ὀρθογώνια, διότι μόνον αὐτὰ μποροῦν νὰ εἶναι στοιχεῖα, δηλαδὴ ἀρχὲς τῶν ἄλλων τριγώνων καὶ γενικότερα σχημάτων, ὅπως εἴδαμε καὶ προηγουμένως (*Τίμ.*, 53 c8 – d2). Γιὰ νὰ τὸ ἀντιδιαστείλει ἀπὸ τὸ ἄλλο σκαληνό, δηλαδὴ τὸ ἡμιτρίγωνο

ISBN: 978-618-82935-0-2

ἰσοπλεύρου τριγώνου, λέγει ὅτι τὸ στοιχεῖο τοῦ δωδεκαέδρου δὲν εἶναι ἐκεῖνο τὸ σκαληνό, ἀπὸ τὸ ὁποῖο ὁ Πλάτων συνιστᾷ τὴν πυραμίδα, τὸ ὀκτάεδρο καὶ τὸ εἰκοσάεδρο (428A).

Ἐπιφανεῖς ἑρμηνευτὲς καὶ σχολιαστὲς τοῦ Πλάτωνα διερωτῶνται καὶ ἐκφράζουν τὴν ἀπορία τους γιὰ τὸ ὅτι οὔτε ὁ Ἀλμπίνος οὔτε ὁ Πλούταρχος μᾶς λένε τί εἴδους τρίγωνο εἶναι αὐτό, ποὺ συγκροτεῖ τὸ δωδεκάεδρο. Ὁ Ἀλμπίνος δὲν κάνει καμιὰ ἀπολύτως διασάφηση καὶ δὲν δίνει κανένα εὐκρινέστερο προσδιορισμό. Ἀπεναντίας, ὁ Πλούταρχος παρέχει τρία στοιχεῖα τῆς ταυτότητάς του: 1) ὅτι αὐτὰ εἶναι πρῶτα, δηλαδὴ ὀρθογώνια, 2) σκαληνὰ καὶ 3) δὲν εἶναι τὰ σκαληνὰ ἐκεῖνα, μὲ τὰ ὁποῖα ὁ Πλάτων συνθέτει τὴν πυραμίδα, τὸ ὀκτάεδρο καὶ τὸ εἰκοσάεδρο. Δὲν προσδιορίζει ὅμως ἐπακριβῶς ποιὸ ἢ ποιὰ εἶναι τὰ τρίγωνα αὐτά, ἂν εἶναι δηλαδὴ ἕνα ἢ δύο καὶ ποιὲς εἶναι οἱ διαστάσεις τους. Ἐπειδὴ ὁ Πλούταρχος δὲν ἦταν σαφὴς γιὰ ἄγνωστο λόγο, τὰ λόγια τοῦ παρεξηγήθηκαν καὶ παρερμηνεύτηκαν. Γι’ αὐτὸ δέχτηκε ποικίλες ἐπιθέσεις ἄλλοτε μὲ ἤπιο καὶ ἄλλοτε μὲ σφοδρὸ τόνο. Τὸ γενικὸ συμπέρασμα τῶν ἐπικριτῶν εἶναι ὅτι ἡ ἄποψή του εἶναι λανθασμένη καὶ ὅτι δὲν κατανόησε τὰ λόγια τοῦ Πλάτωνα. Τὸ περίεργο καὶ ἄδικο στὴν ὅλη ὑπόθεση εἶναι ὅτι ὁρισμένοι ἀπ’ αὐτοὺς νόμισαν ὅτι ὁ Πλούταρχος μὲ τὶς φράσεις του «πρῶτα τρίγωνα», «ἡμιτρίγωνα» καὶ «σκαληνὰ» τρίγωνα ἐννοοῦσε μᾶλλον τὸ ἡμιτρίγωνο ἰσοπλεύρου τριγώνου, ποὺ χρησιμοποίησε ὁ Πλάτων στὴν κατασκευὴ τῶν τριῶν σχημάτων, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὴ φωτιά, τὸν ἀέρα καὶ τὸ νερό, παρόλο ποὺ ὁ ἴδιος ὁ Πλούταρχος – ὅπως εἴδαμε – ἀντιδιαστέλλει ρητά τα τρίγωνα τοῦ δωδεκαέδρου ἀπὸ τὸ ἡμιτρίγωνό του ἰσοπλεύρου τριγώνου. Ὁρισμένοι ἑρμηνευτὲς ὡστόσο ἔκαμαν αὐτὸ τὸ ἀτόπημα ὅπως ὁ Stallbaum (1861). Οἱ ἀξιολογότεροι ἐπικριτὲς τοῦ Πλουτάρχου εἶναι ὁ R. Archer – Hind (1888, 197), ο Th. Martin (1976, 246-247), ὁ H. Cherniss (1976: 54, σημ. α) καὶ ὁ Th. Heath (1931: 177-8, 1921: 236-

ISBN: 978-618-82935-0-2

7, 1956, 98-9). Ὁ ἐξαίρετος αὐτὸς μαθηματικὸς ὑποστηρίζει στὰ ἴδια σημεῖα τῶν ἔργων του ὅτι τὸ τρίγωνό του δωδεκάεδρου εἶναι τὸ χρυσὸ τρίγωνο, δηλαδὴ ἐκεῖνο, στὸ ὁποῖο οἱ παρὰ τὴ βάση γωνίες εἶναι διπλάσιες ἀπὸ ἐκείνη τῆς κορυφῆς. Τὸ τρίγωνο αὐτὸ ἔχει τὴ γωνία κορυφῆς 36^{o} καὶ παρὰ τὴ βάση 72^{o}, 72^{o}. Ἔχει δηλαδὴ κορυφὴ τὴ γωνία καὶ πλευρὲς τὴ διαγώνιο καὶ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου, τὸ ὁποῖο ἐγγράφεται σὲ κύκλο (Εὐκλείδης, IV. 19). Λέγεται πεντάλφα (star-pentagon), ἐπειδὴ πέντε τέτοια τρίγωνα σχηματίζονται στὸ πεντάγωνο. Γιὰ τοὺς Πυθαγόρειους το τρίγωνο αὐτὸ συμβόλιζε τὴν «Ὑγεία», οἱ δὲ πλευρὲς τοῦ ἔχουν τὸ λόγο τῆς χρυσῆς τομῆς, ἀφοῦ σχηματίζεται ἀπὸ τὴν πλευρὰ καὶ τὴ διαγώνιό του πενταγώνου. Αὐτὸ ἀποδεικνύεται μὲν ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη (II IA), φαίνεται νὰ εἶναι ὡστόσο Πυθαγορικῆς προελεύσεως κατὰ τὴ μαρτυρία τοῦ Πρόκλου (1873: 419, Th. Heath 1956:99). Ἡ λύση αὐτὴ τοῦ Heath, παρόλο ποὺ δηλώνει ὀξύνοια καὶ ἐμβάθυνση, δὲν μπορεῖ νὰ ἀνταποκρίνεται στὸ πνεῦμα τοῦ Πλάτωνα γιὰ πολλοὺς λόγους. Ἕνας ἀπ’ αὐτοὺς εἶναι ὅτι τὰ πεντάλφα, ἐκτός του ὅτι ἀλληλοεπικαλύπτονται, δὲν περιλαμβάνουν ὅλην τὴν ἐπιφάνεια τοῦ πενταγώνου καὶ κατὰ συνέπεια τοῦ δωδεκαέδρου. Αὐτὴ ὅμως πρέπει νὰ καλυφθεῖ, γιὰ νὰ μποροῦν νὰ μετρηθοῦν ἡ ἴδια, οἱ ὄγκοι, καὶ τὸ βάρος τῶν σωμάτων, ὥστε νὰ δημιουργηθοῦν κριτήρια γιὰ τὶς ἀναλογίες καὶ συμμετρίες μεταξύ τους (*Τίμ.*, 32 c2, 54 c4). Ἐπιπλέον δὲν συμπληρώνονται 360 τρίγωνα ποὺ προσδιορίζουν οἱ σχολιαστὲς οὔτε ἐμφανίζεται τὸ τρίγωνο μὲ σχέση πλευρῶν 3, 4, 5 μὲ τὸ ὁποῖο ὁ Πλάτων λέγει στὴν *Πολιτεία* του (Η, 548b) ὅτι αὐτὸ χρησιμοποιήθηκε γιὰ τὴ θεία καὶ τὴν ἀνθρώπινη γέννηση. Τὸ θεῖον γεννητὸν τῆς *Πολιτείας* εἶναι ὁ κόσμος. Μὲ τὸ τρίγωνο αὐτό, ὅπως ἀναφέρει ὁ Πλούταρχος, παρίσταναν οἱ Αἰγύπτιοι τὸν κόσμον, τὸ χρησιμοποίησε δὲ καὶ ὁ Πλάτων κατὰ τὴ σύνταξη τοῦ γαμήλιου διαγράμματος (373F). Ἔτσι τὸ ἀντιλαμβάνεται καὶ ὁ Πρόκλος (1901, 14-19, 30, 31), δηλαδὴ τὸ «θεῖον γεννητὸν» εἶναι ὁ κόσμος. Κρίνω ὅτι ἡ

ISBN: 978-618-82935-0-2

ὀρθότερη λύση ἢ ἡ μόνη ὀρθὴ εἶναι ἐκείνη τοῦ Εὐκλείδη (XIII, 18, λῆμμα), ὁ ὁποῖος παρατάσσει πέντε ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα καλύπτουν ὅλη τὴν ἐπιφάνεια τοῦ πενταγώνου.

Ὁ μαθηματικὸς G. Cantor παρατήρησε ὅτι ἡ διαίρεση ἢ διάλυση τοῦ πενταγώνου σὲ τρίγωνα ἐπιτυγχάνεται, ἂν φέρουμε ἀπὸ κάθε κορυφὴ τὴ μεσοκάθετο στὴν ἀπέναντι πλευρὰ καὶ ὅλες τὶς διαγώνιες. Οἱ γωνίες τῶν τριγώνων ποὺ σχηματίζονται εἶναι 36ο, 72ο, 72ο καὶ 36ο, 54ο, 90ο καὶ βρίσκονται ἀκτινωτὰ ἀπὸ τὸ κέντρο (Cantor 1892. II: 177, R. Herz – Fischler, 1988: 83). Ἡ διαίρεση αὐτὴ συνεπάγεται ὅτι σχηματίζονται καὶ τρίγωνα μὲ γωνίες 18^o, 72^o καὶ 90^o, ποὺ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ χρυσοῦ τριγώνου καὶ τρίγωνα μὲ γωνίες 72^o, 54^o, 54^o, ποὺ εἶναι τὰ πέντε ἰσοσκελῆ μὲ γωνία κορυφῆς τὸ κέντρο τοῦ πενταγώνου. Μὲ τὴ διαίρεση αὐτὴ τοῦ Cantor, τὴν ὁποία ἀκολουθεῖ καὶ ὁ Th. Heath (1956: 98), τὸ κάθε ἰσοσκελὲς τρίγωνο μὲ γωνίες 72^o, 54^o, 54^o διαιρεῖται σὲ ἕξι ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ἡμιτρίγωνα, τὸ μὲν ἕνα του χρυσοῦ τριγώνου, τὸ δὲ ἄλλο τοῦ ἀνωτέρω ἰσοσκελοῦς. Τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ εἶναι τὸ Πυθαγορικὸ μὲ σχέση πλευρῶν 3, 4, 5, ἀφοῦ ἡ μεγαλύτερη κάθετη πλευρὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς μικρότερης κάθετης πλευρᾶς καὶ τῆς ὑποτείνουσας. Πρόκειται γιὰ ἐκεῖνο ποὺ δὲν εἶναι ἀλλὰ πλησιάζει τὸ ὀρθογώνιο χρυσὸ τρίγωνο. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ τετράγωνο της μεγαλύτερης κάθετης πλευρᾶς ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσα καὶ τὴ μικρότερη κάθετη πλευρά. Ἂν δηλαδὴ α = ὑποτείνουσα, β = μεγαλύτερη κάθετη πλευρὰ καὶ γ = μικρότερη κάθετη πλευρά, τότε ἔχουμε $β^2 = αγ$ (Σπανδάγος $2004^α$: 21-25). Στὸ τρίγωνο δηλαδὴ μὲ πλευρὲς 3, 4, 5, $4^2 = 3 . 5 = 16 = 15$. Αὐτὰ εἶναι κατὰ προσέγγιση ἴσα, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι οἱ πλευρὲς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ ἔχουν περίπου τὸ λόγο τῆς χρυσῆς τομῆς. Ἐδῶ πρέπει νὰ σημειωθεῖ ὅτι – ὅπως παραδίδεται ἀπὸ τοὺς σχολιαστὲς – ὁ Πλάτων βρῆκε τὴ μέση ἀνάλογο (L. Westerink 1990: 5.17-18, γ. 8): «Μαθηματικὰ δὲ εὗρεν τὴν

ISBN: 978-618-82935-0-2

μέσην καλουμένην ἀνάλογον»).

Τὸ πέμπτο σῶμα, ὁ αἰθέρας, ἀναφέρεται συστηματικὰ γιὰ πρώτη φορὰ στὴν *Ἐπινομίδα* (981 b – c, 984 b c). Ὁ πιὸ πιστὸς μαθητὴς τοῦ Πλάτωνα Ξενοκράτης μαρτυρεῖ ὅτι τὸ πέμπτο σχῆμα ἀποδίδεται στὸ πέμπτο σῶμα, ποὺ εἶναι ὁ αἰθέρας (H. Diels 1895: 1165: «διαιρῶν … ἃ δὴ πέντε σχήματα καὶ σώματα ὠνόμαζεν, εἰς αἰθέρα καὶ πῦρ καὶ ὕδωρ καὶ γῆν καὶ ἀέρα· ὥστε ὁ αἰθὴρ πέμπτον ἄλλο τί σῶμα … παρὰ τὰ τέτταρα στοιχεῖα».). Τὸ ἐρώτημα ποὺ προβάλλει στὴ συνέχεια εἶναι γιατί ὁ Πλάτων δὲν παρουσίασε στὸν *Τίμαιο* ὅλα τα σώματα, δηλαδὴ καὶ τὰ πέντε, ἀλλὰ πραγματεύτηκε τὸ πέμπτο στὸ τελευταῖο συστηματικό του ἔργο, ποὺ εἶναι ἡ *Ἐπινομίς*. Πρέπει βέβαια ἐδῶ νὰ σημειωθεῖ ὅτι - ὅπως ἀπέδειξε ὁ Εὐκλείδης- (XIII, 18) ὑπάρχουν μόνο αὐτὰ τὰ πέντε ἰσογώνια καὶ ἰσόπλευρα σχήματα, δηλαδὴ κανονικὰ πολύεδρα.

Σὲ ἄλλη μου ἐργασία προσπάθησα νὰ δείξω ὅτι ἡ *Ἐπινομὶς* εἶναι ὁ *Φιλόσοφος*, τὸν ὁποῖο εἶχε ὑποσχεθεῖ ἤδη στὸν *Σοφιστὴ* (217α 3, 254b 3-5) καὶ τὸν *Πολιτικὸ* (257 α-β) ὅτι θὰ ἔγραφε (Γ. Κουμάκης 2013, 2014α).

Τὸ ὅτι ὁ Πλάτων χρησιμοποιεῖ ἔντονα τὴ χρυσῆ τομὴ στὸ δωδεκάεδρο ἐκτὸς ἀπὸ τὸ χρυσὸ τρίγωνο, στὸ ὁποῖο αὐτὴ εἶναι ἐμφανής, παρατηροῦμε ὅτι καὶ στὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ἔχουμε τὸν χρυσὸ λόγο. Γιὰ παράδειγμα τὸ ἐμβαδὸν τῶν ἡμιτριγώνων τοῦ χρυσοῦ τριγώνου (3,592) πρὸς τὸ μεγαλύτερο ὀρθογώνιο τρίγωνο (5, 812) ἔχουν τὸ λόγο τῆς χρυσῆς τομῆς, δηλαδὴ 1, 618. Ὁ ὁρατὸς αὐτὸς κόσμος ὡς εἰκόνα τοῦ νοητοῦ εἶναι ἕνας καὶ «μονογενής, μέγιστος, ἄριστος κάλλιστος καὶ τελειώτατος» (*Τίμ*., 92c 5 – 9). Ὁ ὁρατὸς καὶ ἁπτὸς κόσμος εἶναι μὲν εἰκόνα τοῦ νοητοῦ, ἀλλὰ καὶ τὸ δωδεκάεδρο εἶναι εἰκόνα τοῦ ὁρατοῦ (*Τιμαιος Λοκρὸς*, 98 d – e). Μὲ τὴν ἄποψη αὐτὴ παρουσιάζεται στενὴ σχέση καὶ συγγένεια πρὸς τὴν τετμημένην γραμμὴν τῆς Πολιτείας, ὅπου τα εἴδωλα εἶναι εἰκόνα τῆς εἰκόνας (ΣΤ 509 d κ. ἑξ. πβ. G. Koumakis, 2010-11).

ISBN: 978-618-82935-0-2

Ἂς δοῦμε τώρα πῶς ἀπὸ τὶς μαθηματικὲς αὐτὲς διεργασίες προκύπτει ἡ διαλεκτική, οἱ κύριες μορφὲς τῆς ὁποίας εἶναι ἀφενὸς μὲν ἡ ὑπόθεση ἀφετέρου δὲ ἡ σύνθεση καὶ ἡ διαίρεση. Ἡ ὑπόθεση εἶναι ἐμφανὴς στὸν *Τίμαιο*, ἀφοῦ ὁ λόγος ἢ ὁ μῦθος εἶναι εἰκώς, δηλαδὴ πιθανὸς (29 d 2, 48 d 2, 53 d 5 - 6). Ὅταν ὁ Πλάτων ἀρχίζει τὴ συναρμολόγηση τοῦ κόσμου μὲ τὰ κάλλιστα τρίγωνα χρησιμοποιεῖ ἐκφράσεις, ποὺ παραπέμπουν σὲ ὑποθέσεις ὅπως *ὑποτιθέμεθα* (53d 5), *προαιρετέον*, *τιθέμεθα* κ.τ.λ. (54 a). Ἡ δεύτερη κύρια μορφὴ τῆς διαλεκτικῆς εἶναι ἡ σύνθεση καὶ ἡ διαίρεση, ἡ ὁποία κυριαρχεῖ ἔντονα στοὺς ὕστερους διαλόγους καὶ κυρίως στὸν *Σοφιστὴ* καὶ τὸν *Πολιτικό*. Ὁ Πλάτων συνθέτει μὲ στοιχειώδη τρίγωνα τὶς βάσεις τῶν πέντε καλλίστων σχημάτων ποὺ εἶναι στοιχεῖα καὶ εἰκόνες τῶν σωμάτων, τὰ ὁποῖα μὲ τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦν νὰ διαιρεθοῦν. Ἡ διαίρεση αὐτὴ πρέπει νὰ εἶναι κατ' εἴδη καὶ ὄχι κατὰ μέρη. Ἂς παρατηρήσουμε στὴ συνέχεια πῶς γίνεται ἡ κατ’ εἴδη αὐτὴ διαίρεση. Τὰ τρίγωνα χωρίζονται σὲ ὀρθογώνια καὶ μὴ ὀρθογώνια. Τὰ τρίγωνα, μὲ τὰ ὁποῖα δομεῖται ὁ κόσμος, εἶναι ὀρθογώνια, μποροῦν δὲ νὰ εἶναι εἴτε ἡμιτετράγωνα, δηλαδὴ ὀρθογώνια ἰσοσκελῆ, εἴτε ἡμιτρίγωνα. Τὰ τελευταῖα ὑποδιαιροῦνται πάλι σ’ ἐκεῖνο 1) τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ 2) ἰσοσκελοῦς. Τὸ ἰσοσκελὲς ὑποδιαιρεῖται πάλι εἴτε σ' ἐκεῖνο μὲ γωνίες 72^o, 54^o, 54^o, εἴτε σ' ἐκεῖνο μὲ γωνίες 36^o, 72^o, 72^o. Ἡ γωνία δηλαδὴ τῆς κορυφῆς τοῦ δεύτερου εἶναι ἡμίσεια ἀπὸ ἐκείνη τοῦ πρώτου. Ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ ἰσοσκελῆ λαμβάνομε κάθε φορὰ τὸ ἥμισυ. Στὴ μὲν πρώτη περίπτωση ἔχουμε τὸ Πυθαγορικὸ (Iamblichus 1922: 50) τρίγωνο μὲ γωνίες 36^o, 54^o, 90^o, στὸ ὁποῖο οἱ τρεῖς πλευρὲς ἔχουν περίπου τὸν λόγο τῆς χρυσῆς τομῆς. Στὴ δὲ δεύτερη προκύπτει τὸ ἥμισύ του χρυσοῦ τριγώνου μὲ γωνίες 18^o, 72^o, 90^o. Μὲ τὸ σκαληνὸ ἡμιτρίγωνο κατασκευάζονται τὰ τέσσερα σχήματα καὶ μὲ τὸ ἡμιτετράγωνο ὁ κύβος. Ἂς σημειωθεῖ ἐδῶ ὅτι τὸ ἡμιτρίγωνο, ἐπειδὴ ἐμπεριέχει τὸ ἥμισυ, ἐνέχει τὴν ἔννοια τῆς συμμετρίας (*Πολιτ*., Ζ 530 a

ISBN: 978-618-82935-0-2

1).

Ἐπειδὴ ὅμως ὁ Πλάτων μιλάει πρωτίστως γιὰ τὴ σύνθεση τῶν σωμάτων, ὀφείλουν καὶ οἱ ἑρμηνευτὲς νὰ ἀκολουθήσουν πιστὰ τὸν ἴδιο δρόμο. Ὁ τρόπος σύνθεσης τῶν βάσεων τοῦ δωδεκαέδρου παρέχεται ἀπὸ τοὺς μαθηματικούς, ποὺ εἶχαν τὴν εὐγενῆ καλοσύνη νὰ βοηθήσουν στὸ ἔργο μὲ ἀγαστὴ συνεργασία. Τοὺς ὀφείλω θερμὲς εὐχαριστίες. Δὲν πρέπει δηλαδὴ νὰ ἀρχίσουμε ἀπὸ τὴ διαίρεση, ὅπως ἔχει ἐπιχειρηθεῖ μέχρι σήμερα ἀπὸ τοὺς σχολιαστές, ἀλλὰ ἀπὸ τὴ σύνθεση ἀκολουθοῦντες τὶς ὑποδείξεις τοῦ Πλάτωνα. Μὲ ποιὸ τρόπο μεταβαίνομε ἀπὸ τὸ Πυθαγορικὸ τρίγωνο μὲ σχέση πλευρῶν 3, 4, 5, στὸ ὁποῖο ἡ βάση εἶναι ἡ μεγαλύτερη κάθετη πλευρὰ 4 καὶ ὕψος ἡ μικρότερη, 3, (ὥστε νὰ συμπληρώνονται τὰ τρία στοιχειώδη τρίγωνα), στὸ μεγαλύτερο ὅμοιό του, τεκμηριώνεται ἀπὸ τοὺς μαθηματικούς. Αὐτὸ ποὺ ἐννοῶ εἶναι πῶς ἀπὸ τὸ τρίγωνο ΓΗΖ μεταβαίνομε στὸ ΑΓΖ στὸ σχῆμα 4. Πῶς τώρα μεταβαίνουμε ἀπὸ τὸ προαναφερθὲν τρίγωνο ΑΓΖ τοῦ σχήματος 4 στὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΓΒ μὲ γωνίες 72^o, 54^o, 54^o τοῦ σχήματος 3 μᾶς ἐξηγεῖ ὁ Πρόκλος (1901: 43, 15 - 19, πβ. A. J. Festugiere 1970: II, 150). Λέγει συγκεκριμένα ὅτι αὐτὸ ἐπιτυγχάνεται ἂν προεκτείνουμε τὴ μικρότερη κάθετη πλευρὰ (ΓΖ) σὲ ἴσο μῆκος, δηλαδὴ ἂν τὴ διπλασιάσουμε καὶ ἑνώσουμε τὸ ἄκρον της μὲ τὴν κορυφὴ τοῦ τριγώνου, δηλαδὴ τοῦ σημεῖο Β τῆς ΖΒ μὲ τὸ Α. Ἂν τώρα ἑνώσουμε πέντε τέτοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα μὲ κέντρο τὴ γωνία 72^o, τότε σχηματίζεται τὸ πεντάγωνο, ἀφοῦ καλύπτεται ὅλη ἡ ἐπιφάνειά του. Τὴ λύση αὐτὴ ἔδωσε ὁ Εὐκλείδης (XIII, 18, λῆμμα).

Πρέπει τέλος νὰ σημειωθεῖ ὅτι στὴν *Πολιτεία* (ΣΤ 509 c – 511 d) μὲ τὰ μαθηματικά, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὴ διάνοια, μπορεῖ ἐπίσης νὰ γίνει διαλεκτική, ἡ ὁποία ἀνήκει στὸ ἀνώτατο μέρος τετμημένης γραμμῆς, ποὺ ἀναφέρεται στὴν ἐπιστήμη καὶ τὸν νοῦ, ἀφοῦ αὐτὰ εἶναι ἰδέες (510 d 7) καὶ νοητὰ μετὰ ἀρχῆς

(511 d 2. Πβ. Fr. Cornford 1965: 63). Οἱ ἰδέες ποὺ ζητοῦμε δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἰδωθοῦν κατ' ἄλλον τρόπο παρὰ μόνον μὲ τὴν διάνοια (511 a). Μὲ τὴ διαλεκτικὴ ὅμως κατὰ Πλάτωνα, εἴτε μὲ τὴ μορφὴ τῆς ὑπόθεσης εἴτε τῆς σύνθεσης καὶ τῆς διαίρεσης, κατακτοῦμε τὴ γνώση (*Φαίδ*. 99 c - d, 101 d - e. Πβ. Koumakis 2000). Εἶναι λοιπὸν ἐπιτακτικὴ ἀνάγκη νὰ βροῦμε ἐπακριβῶς τὸν ἀριθμὸ καὶ τὴν ταυτότητα τῶν καλλίστων τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὶς ἀρχὲς καὶ τὰ αἴτια σύνθεσης τῶν 5 σχημάτων, γεννητόρων τῶν 5 καλλίστων σωμάτων. Ἀπὸ τὰ τρίγωνα συντελεῖται ἥ του ὅλου γένεση λέγει ὁ Ἰάμβλιχος (1922: 87). Μόνον ἂν γνωρίσουμε τὶς ἀρχὲς καὶ τὰ αἴτια, δημιουργοῦμε τὶς ἀναγκαῖες προϋποθέσεις τῆς γνώσης κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη (*Φυσ. Ἀ*., 1, 184 a 10-14, B 3, 194 b 16-17, *Μ.τ.φ.*, A3, 993 a 23-26). Ἀλλὰ καὶ ὁ Πλάτων τονίζει στὸν *Φίληβο* (17 a 23) ὅτι ἡ διαφορὰ τῆς ἐριστικῆς ἀπὸ τὴ διαλεκτικὴ ἔγκειται στὸ ὅτι ἡ μὲν ἐριστικὴ μεταβαίνει ἀπὸ τὸ ἕνα εὐθὺς στὸ ἄπειρο, ἐνῶ ἡ διαλεκτικὴ ἐπιδιώκει τὸ μεταξὺ καὶ τὸ μέσον. Προσπαθεῖ δηλαδὴ νὰ καθορίσει ποιὰ καὶ πόσα εἶναι. Ἡ διαλεκτικὴ ἀκολουθεῖ τὸ μέσον των 2 ἄκρων (*Πολιτικ*. 262 b 6, 265 a 4). Στὸ πνεῦμα αὐτὸ λέγει ὅτι ἡ ἄριστη πολιτεία βρίσκεται στὸ μέσον των πολιτευμάτων μεσεύει δηλαδὴ (*Νόμοι*, ΣΤ, 756 e 9-10). Πρέπει νὰ ἐπισημανθεῖ ἀκόμα ἡ σχέση τοῦ 5 τοῦ πενταγώνου καὶ τοῦ κόσμου διότι ὁ ἀριθμὸς 5 εἶναι τὸ κέντρο, δηλαδὴ τὸ ἥμισυ του 10, τὸ ὁποῖο συμβολίζει τὸν κόσμο, τὸν οὐρανό, τὸ πᾶν (Ἰάμβλιχος 1992: 30 - 32, 83).

Βιβλιογραφία

Εὐκλείδης, (1953-1975). *Στοιχεῖα*, 4 τόμοι, ἐκδ. Ε. Σταμάτης, Ο.Ε.Σ.Β., Ἀθήνα.
Θεοδωρακόπουλος, Ἰ., (1971). *Πλάτωνος Φαῖδρος, Εἰσαγωγή, ἀρχαῖο κείμενο μὲ σχόλια*, Ἀθήνα.
Κάλφας, Β., (1997). *Πλάτων, Τίμαιος, Εἰσαγωγή, Μετάφραση,Σχόλια*, Πόλις, Ἀθήνα.
Καραμπατζάκη, Ἑ., (2014). «Ἐπιδράσεις τοῦ πλατωνικοῦ *Τιμαίου* στὴ στωικὴ φιλοσοφία», *Φιλοσοφεῖν* 10, 167-180.
Κουμάκης, Γ., (2013). «Περὶ τοῦ νοητοῦ καὶ ὁρατοῦ κόσμου κατὰ Πλάτωνα», *Φιλοσοφία καὶ κοσμολογία I*, Αἰγηίς, Πειραιεύς.
— (2014[α]). «Ὁ φιλόσοφος-Κυβερνήτης στὴν *Ἐπινομίδα* τοῦ Πλάτωνα», *Ἑλληνικὴ Φιλοσοφικὴ Ἐπιθεώρηση*, 31, 3-25.

— (2014[β]). «Προλεγόμενα γιὰ μιὰ νέα ἑρμηνεία γένεσης τοῦ κόσμου κατὰ Πλάτωνα (*Τίμ.* 54a 5 -7)», *Φιλοσοφία καὶ κοσμολογία ΙΙ*, Αἰγηίς, Πειραιεύς, 60-91.
Μούκανος, Δ., (1979). *Ὁ τρόπος τοῦ εἶναι τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων κατὰ τὸν Πλάτωνα καὶ τὸν Ἀριστοτέλη*, Ἀθήνα.
Παπασπύρου, Π., (2014). «Ὁ Πλατωνικὸς διάλογος *Τίμαιος* καὶ ἡ γέννηση τοῦ κοσμογραφικοῦ μυστηρίου τοῦ J. Kepler», *Φιλοσοφία καὶ κοσμολογία*, Αἰγηίς, Πειραιεύς, 100-108.
Σπανδάγος, Ε., (2001). *Ἡ ἀριθμητικὴ εἰσαγωγὴ τοῦ Νικομάχου τοῦ Γερασηνοῦ*, Αἴθρα, Ἀθήνα.
— (2002). *Στοιχείων βιβλίον ιδ΄ τοῦ Ὑψικλέους καὶ στοιχείων ιε΄ Ἀνωνύμου*, Αἴθρα, Ἀθήνα.
— (2004α). *Ἡ χρυσὴ τομὴ στὴν ἀρχαία Ἑλλάδα*, Αἴθρα, Ἀθήνα.
— (2004β). *Ἡ μαθηματικὴ συναγωγὴ τοῦ Πάππου τοῦ Ἀλεξανδρέως*, Αἴθρα, Ἀθήνα.
Φίλη, Χρ., (2002). «Ἡ γεωμετρικὴ θεώρηση τῆς ὕλης στὸν *Τίμαιο*», *Φιλοσοφία, Ἐπετηρίς τοῦ Κέντρου Ἐρεύνης τῆς Ἑλληνικῆς Φιλοσοφίας*, 71-80.

Albinos, (1945). *Epitomé*, ed. P. Louis, Les Belles Lettres, Paris.
Alcinoos, (1990). *Enseignement des doctrines de Platon*, ed. Whittaker & P. Louis, Les Belles Lettres.
Archer- Hind, R.D. (1888, 1988). *The Timaeus of Plato*, Ayer Company, Salem.
Balashov, Y. (1994). “Should Platos ’ Line Be Divided in the Mean and Extreme Ratio?”, *Ancient Philosophy*, 14, 283-295.
Cantor, G., (1892). *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik*, vol. II, B.-G. Teubner, Leipzig.
Cherniss, H., (1976). *Plutarch’s moralia in seventeen volumes, XIII*, Cambridge University Press, Cambridge.
Cornford, F., (1956). “Mathematics and Dialectic in the *Republic* VI-VII”, in: R. Allen, *Studies in Plato’s Metaphysics*, London, Routledge & Kegan, 61-95.
Diels, H., (1895). *Simplicii, In Aristotelis physicorum commentaria. Commentaria in Aristotelem Graeca X*, Academiae litterarum regiae borussicae, Berolini.
Diels, H., Kranz, W., (2005, 2007). *Οἱ προσωκρατικοί. Οἱ μαρτυρίες καὶ τὰ ἀποσπάσματα*. Ἀπόδοση στὰ νέα ἑλληνικά Β. Κύρκος, τόμοι Α καὶ Β, ἐκδόσεις Παπαδήμα, Ἀθήνα.
Euclidis, (1973). *Elementa*, ed. I. L. Heiberg & E. Stamatis, Teubner, Leipzig.
Festugière, A. J., (1970). *Proclus, Commentaire sur la République*. Tome II, Vrin, Paris.
Gaiser, K., (1962). *Platons ungeschriebene Lehre*, Klett Verlag.
Galilei, G., (1623). *Opera Omnia* vol. IV.
Heath, Th., (1921)., *A History of Greek Mathematics*, vol. I, At the Clarendon Press, Oxford.
— (1931). *Manual of Greek Mathematics*, At the Clarendon Press, Oxford.
— (1956). *The Thirteen Books of Euclid’s Elements*, vol. II, Dover Publications, New York.
Heisenberg, W., (2008). *Der Teil und das Ganze. Gespräche im Umkreis der Atomphysik*, Piper.
Herz-Fischler, R., (1988). *A Mathematical History of the Golden Number*. Dover Publications, N.York.
Hultsch, Fr., (1878). *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt* , vol. II, Weidmann, Berolini.
Iamblichus, (1922). *Theologoumena arithmeticae*, ed. V. de Falco, Teubner, Lipsiae.
Kepler, J., (1982). *Mysterium Cosmographicum*, trans. by A. M. Duncan, Abaris Books, New York.
Koumakis, G., (2000). “Plato on Dialectic and Democracy”, *Δωδώνη*, τόμ. ΚΘ΄, Μέρος τρίτο, 23-59.
— (2004). “Plato’s so-called "unwritten doctrines"”, in: *Conceptions of Philosophy Ancient and Modern*, ed. by K. Boudouris, Athens, 192-215.
— (2010-11). “In Search of the Dialectic on the Divided Line (Plato, *Republic* 509d)”, *Πλάτων*, 57.
Lassere, Fr., (1964), *The Birth of Mathematics in the Age of Plato*, London.
Livio, M., (2005). *Ὁ χρυσὸς λόγος, Ἡ ἱστορία τοῦ Φ, τοῦ ἐκπληκτικότερου ἀριθμοῦ*, μετάφρ. Μ. Σταυροπούλου, ἐκδόσεις Ἐνάλιος, Ἀθήνα.
Lloyd, D., (2006). “Symmetry and Asymmetry in the Construction of “Elements” in the *Timaeus*”, *The Classical Quarterly*, 56, 459-474.
Martin, Th., (1841, 1976). *Études sur le Timée de Platon*, Arno Press.
Nicomachus Geraseni Pythagorei, (1866). *Introductionis arithmeticae*, libri II. ed. R. Hoche, Teubner.
Philoponus, I., (1897). *In Aristotelis de anima libros commetaria. Commentaria in Aristotelum Graeca*, vol. XV, ed. M. Hayduck, Reimer, Berolini.
Porphyre, (1982). *Vie de Pythagore, Lettre à Marcella*, ed. É des Places, Les Belles Letrres, Paris.
Procli diadochi, (1901). *In Platonis Rem Publicam commentaria*, ed. G. Kroll, Teubner, Leipzig.
— (1904). *In Platonis Timaeus Commentaria*, ed. E. Diehl II, Teubner, Lipsiae.
— (1873, 1965). *In primum Euclidis elementorum commentaria*, Teubner, Lipsiae.

ISBN: 978-618-82935-0-2

Stallbaum, G., (1863). *Platonis Timaeus et Critias. Platonis opera omnia*, vol. VIII, Gothae.
Timaeus Locrus, (1972). *De natura mundi et animae*, ed. W. Marg, E.J. Brill, Leiden.
Westerink, L.G., Trouillard, J., (1990). *Prolégomènes à la philosophie de Platon*, Les Belles Lettres.