ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δρ Μιχάλης ΛΑΜΠΡΟΥ, Καθηγητής Μαθηματικών

*1*

Η επίκεντρη γωνία $\widehat{\Delta Z\Gamma}$ είναι το $\frac{1}{5}$ της περιφέρειας , άρα $\frac{1}{5}360^0 = 72^0$. Για τον ίδιο λόγο οι επίκεντρες γωνίες στα τόξα $\widehat{AB}, \widehat{B\Gamma}, \widehat{\Gamma\Delta}, \widehat{\Delta E}, \widehat{EA}$ είναι από $72^0$. Συνεπώς η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{E\Gamma\Delta} = \frac{1}{2}72^0 = 36^0$ και λόγω συμμετρίας $\widehat{B\Delta\Gamma} = 36^0$. Το τρίγωνο ΖΔΓ είναι ισοσκελές με $\hat{Z} = 72^0$ άρα κάθε μία από τις γωνίες της βάσης του είναι $\frac{1}{2}(180^0 - 72^0) = \frac{1}{2}108^0 = 54^0$ . Έτσι το τρίγωνο ΖΔΓ έχει $\widehat{Z\Gamma E} = \widehat{Z\Gamma\Delta} - \widehat{\Delta\Gamma E} = 54^0 - 36^0 = 18^0$. Με άλλα λόγια το τρίγωνο αυτό είναι της μορφής (σχήμα 1) .

Παρατηρούμε ότι οι ΓΚ,ΔΛ θα είναι κάθετες στις πλευρές διότι στο τρίγωνο ΚΔΓ είναι $\widehat{\Delta K\Gamma} = 180^0 - 54^0 - 36^0 = 90^0$ . Όμοια η ΔΛ. Υπόψη ότι τότε και η ΖΗ είναι κάθετη στην ΓΔ. Ένας τρόπος είναι μονολεκτικός : τα ύψη συγκλίνουν και τα ΓΚ,ΔΛ είναι ύψη, οπότε το ΖΗ είναι το τρίτο ύψος. Πιο απλά η ΖΗ είναι διχοτόμος της γωνίας Ζ λόγω συμμετρίας.Αρα $\widehat{\Delta ZH} = \frac{1}{2}72^0 = 36^0$. Συνεπώς το τρίγωνο ΖΔΜ έχει $\widehat{\Delta ZM} + \widehat{Z\Delta M} = 36^0 + 54^0 = 90^0$. Άρα είναι ορθογώνιο (Σχήμα 2).

*2*

**Εύρεση του λόγου $\frac{AH}{ZH}$**

Χρησιμοποιώντας τα τρίγωνα ΑΕΗ και ΑΓΕ έχουμε

ΑΗ$=\frac{AE}{\sigma\upsilon\nu 36^0} = \frac{A\Gamma.\sigma\upsilon\nu 72^0}{\sigma\upsilon\nu 36^0}$

Από το τρίγωνο ΓΖΗ έχουμε ΖΗ=ΓΖ.εφ$36^0$ Άρα ο λόγος $\frac{AH}{ZH}$ είναι

$$\frac{AH}{ZH} = \frac{A\Gamma.\sigma\upsilon\nu 72^0}{\sigma\upsilon\nu 36^0}\frac{1}{\Gamma Z.\varepsilon\varphi 36^0} = \frac{A\Gamma}{\Gamma Z}.\frac{\sigma\upsilon\nu 72^0}{\eta\mu 36^0} = \frac{A\Gamma}{\Gamma Z}.\frac{\eta\mu 18^0}{2\eta\mu 18^0.\sigma\upsilon\nu 18^0} =$$

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma Z}.\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu 18^0} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 54^0}.\frac{1}{2\sigma\upsilon\nu 18^0} = \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu 18^0.\sigma\upsilon\nu 54^0}.$$

Σημειώνω ότι είναι γνωστή η ακριβής τιμή των συν$18^0$ ,συν$54^0$ .

Δηλαδή συν$18^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ , συν$54^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

Άρα $\frac{AH}{HZ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} =$

$\frac{16}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{100-4.5}} = 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{80}} = 8 \cdot \frac{1}{4.\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0{,}8944271$ Άρα ο λόγος $\frac{AH}{HZ} = 0{,}8944271$ (Σχήμα 3)

Θ το μέσο της ΒΗ. Αν φέρω ΘΚ κάθετη στην ΑΒ, τότε ΘΚ είναι παράλληλη της ΓΗ. Άρα η ΘΚ διέρχεται από το μέσο των ΒΕ και ΒΓ. Δηλ διέρχεται από το Ζ (Σχήμα 3).

## ΕΜΒΑΔΑ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Δρ Γεωργία ΚΩΣΤΑΚΗ, Καθηγήτρια Μαθηματικών

$\Gamma Z = 4$. $\tan 36^o = \frac{HZ}{\Gamma Z}$.

$HZ = 4\tan 36^o = 2.906170112$. $\tan 54^o = \frac{AZ}{\Gamma Z}$.

$AZ = \Gamma Z \tan 54^o = 5.505527682$.

$AH = AZ - HZ = 5.505527682 - 2.906170112 = 2.59935757$

$\cos 36^o = \frac{A\Delta}{AH} \Rightarrow A\Delta = AH\cos 36^o = 2.102924448$.

$\sin 36^o = \frac{\Delta H}{AH} \Rightarrow \Delta H = AH\sin 36^o = 1.527864045$.

$\tan 18^o = \frac{\Delta H}{\Gamma\Delta} \Rightarrow \Gamma\Delta = \frac{\Delta H}{\tan 18^o} = 4.702282019$.

εμβαδόν $(\overset{\Delta}{A\Delta H})$: $\frac{A\Delta \cdot \Delta H}{2} = 1.606491327$.

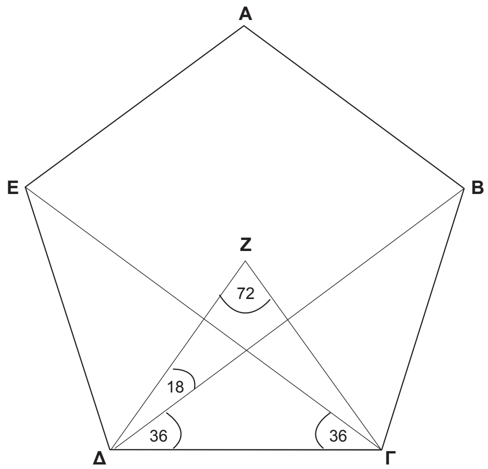
εμβαδόν $(\overset{\Delta}{\Gamma Z H})$: $\frac{HZ \cdot \Gamma Z}{2} = 5.812340224$.

εμβαδόν $(\overset{\Delta}{\Gamma H \Delta})$: $\frac{\Delta H \cdot \Gamma\Delta}{2} = 3.592223813$.

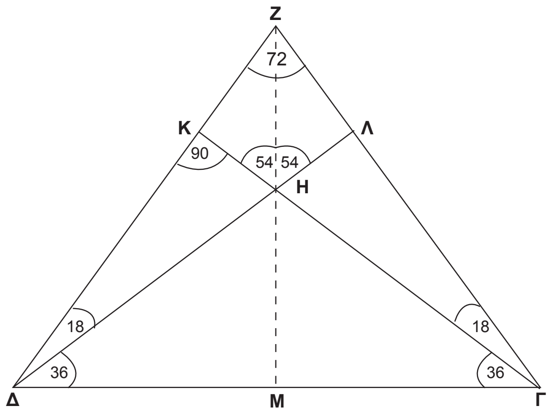
εμβαδόν $(\overset{\Delta}{A\Gamma Z})$: $\frac{AZ \cdot \Gamma Z}{2} = 11.01105536$.

Πρέπει $(\overset{\Delta}{A\Gamma Z}) = (\overset{\Delta}{\Gamma H\Delta}) + (\overset{\Delta}{\Gamma Z H}) + (\overset{\Delta}{A\Delta H})$. (Σχήμα 4 )

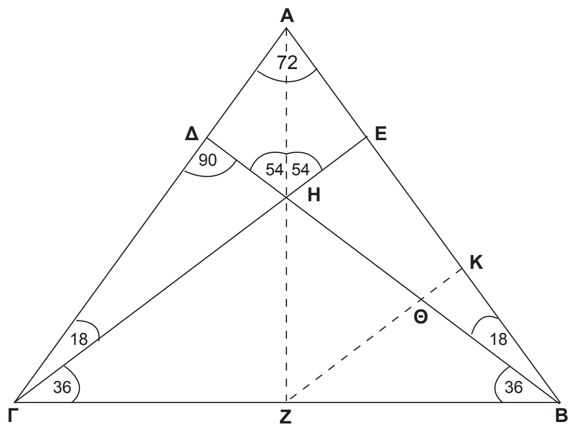
# ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ



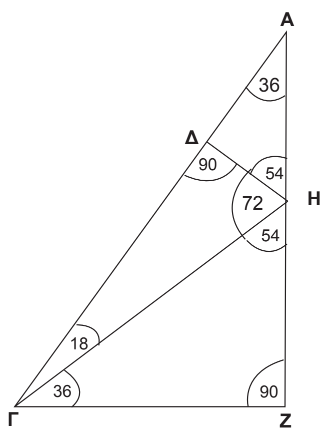

Σχήμα 1



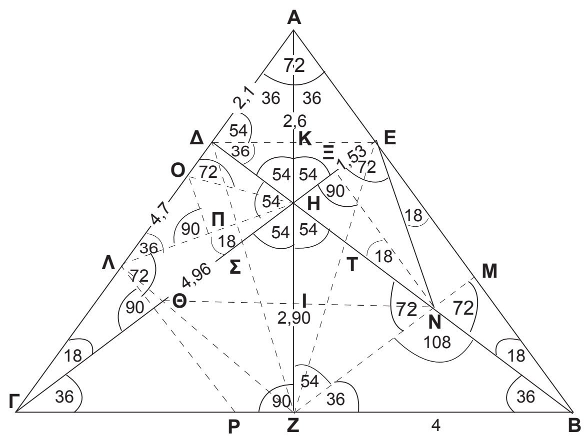

Σχήμα 2




Σχήμα 3

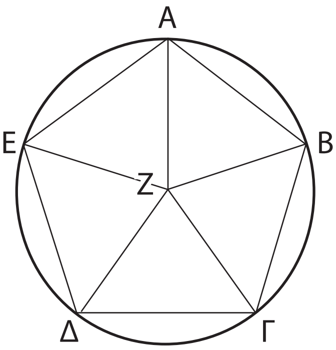



Σχήμα 4

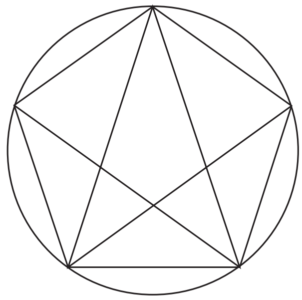



Σχήμα 5

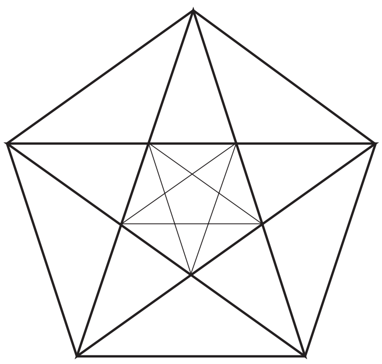
# ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΕΝΤΑΓΩΝΟΥ ΤΟΥ ΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟΥ



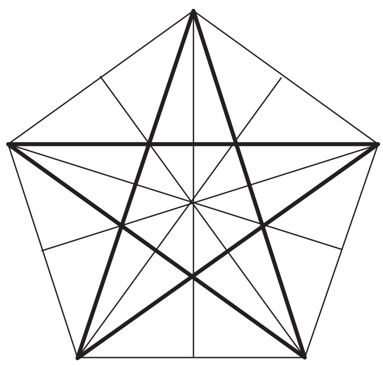

Σχ. 1 Ευκλείδης στοιχεία XIII, 18



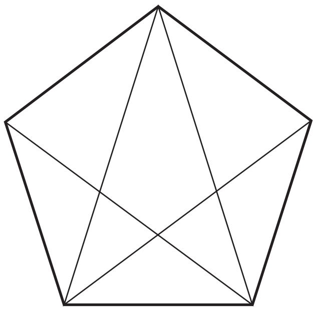
Σχ. 2 Herz - Fischler, R. (εξώφυλλο)



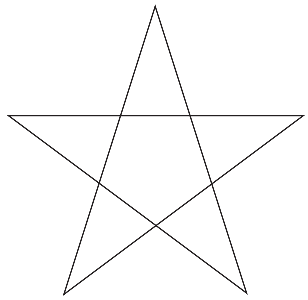
Σχ. 3 Fritz, K. (1945)



Σχ. 4 Cantor (1892, II, 177)



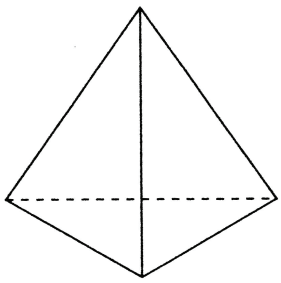
Σχ. 5



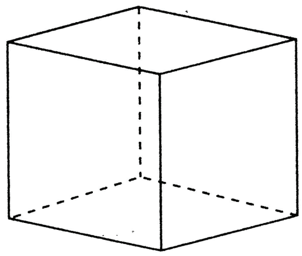
Σχ. 6

Heath, Th.
Ιστορία των Ελληνικών μαθηματικών, I, 203

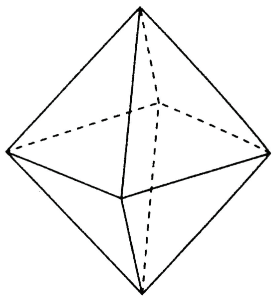
## ΤΑ ΠΕΝΤΕ ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ ΚΑΙ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ Ή ΠΡΩΤΑ ΤΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΑ



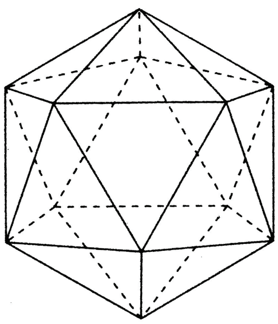
Σχήμα 1. Τετράεδρο (πυραμίς)
4x6=24
ημιτρίγωνο ισοπλεύρου τριγώνου



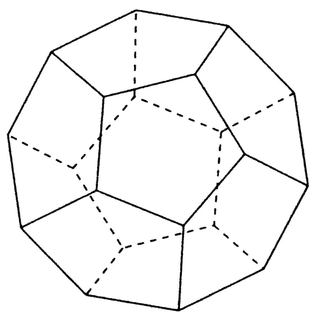
Σχήμα 2. Εξάεδρο (κύβος)
6x4=24
ημιτετράγωνο



Σχήμα 3. Οκτάεδρο
8x6=48
ημιτρίγωνο ισοπλεύρου τριγώνου

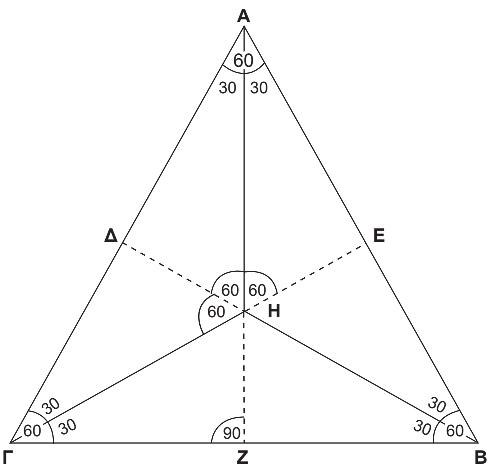


Σχήμα 4. Εικοσάεδρο
20x6=120
ημιτρίγωνο ισοπλεύρου τριγώνου



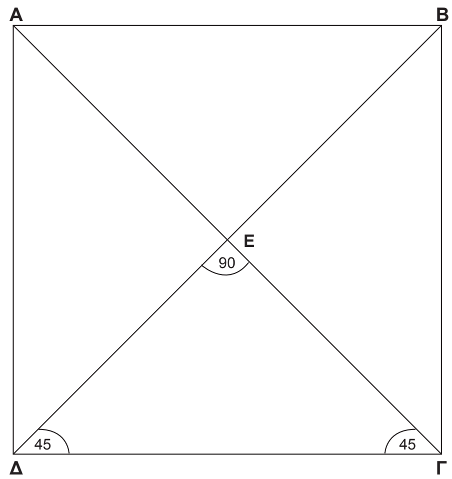
Σχήμα 5. Δωδεκάεδρο
12x5x6=360
α) ζωογονικό τρίγωνο με πλευρές 3,4,5.
β) ημιτρίγωνο χρυσού τριγώνου $18^{o}$, $72^{o}$ και $90^{o}$.

# ΓΕΝΕΣΗ ΤΩΝ ΠΕΝΤΕ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΩΝ ΓΕΝΩΝ Ή ΣΩΜΑΤΩΝ ΑΠΟ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ



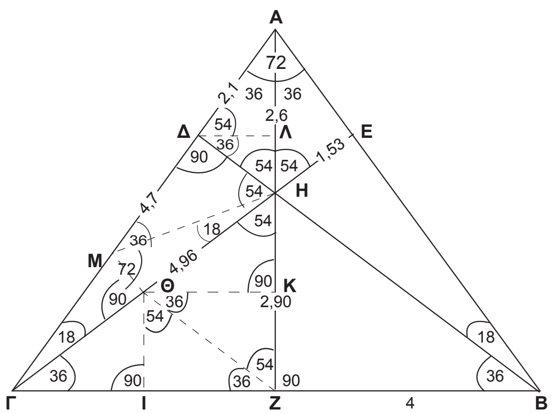

Σχήμα 1  Πλευρές τριγώνου: 1, √3, 2

Το τρίγωνο στο σχήμα 1 είναι στοιχείο των σχημάτων: τετραέδρου, δηλαδή πυραμίδας (πυρός), οκταέδρου (αέρος) και εικοσαέδρου (ύδατος).



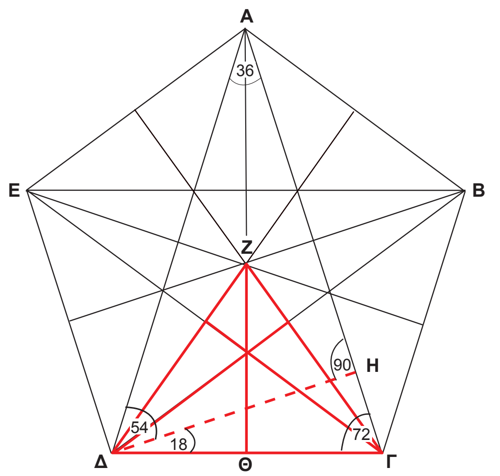

Σχήμα 2  Πλευρές τριγώνου: 1, 1, √2

Το τρίγωνο στο σχήμα 2 είναι στοιχείο του εξαέδρου, δηλαδή του κύβου (γης).




Σχήμα 3  Πλευρές τριγώνου: 3, 4 ,5 κατά προσέγγιση

Το τρίγωνο ΓΗΖ (και τα όμοιά του) είναι το βασικό στοιχείο του παντός, δηλαδή του κόσμου.

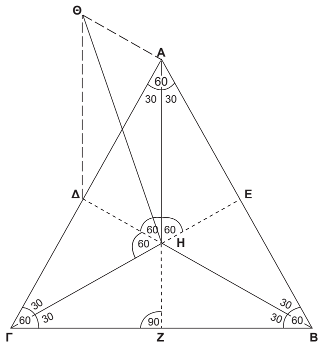



Σχήμα 4  Δωδεκάεδρον

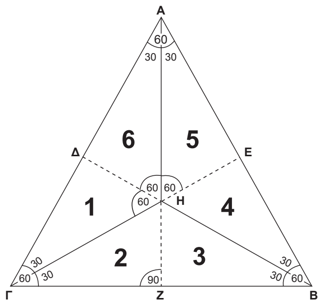
Παρμένο από: Th. Heath, A History of Greek Mathematics, I, 296

Το δωδεκάεδρο στο σχήμα 4 συμβολίζει το σύμπαν, δηλαδή το παν.

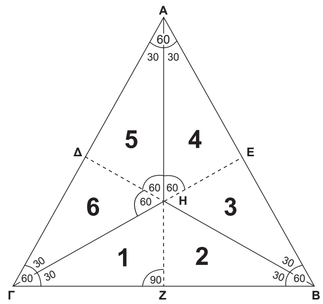
# ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΙΣΟΠΛΕΥΡΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΚΑΤΑ ΔΙΑΜΕΤΡΟΝ



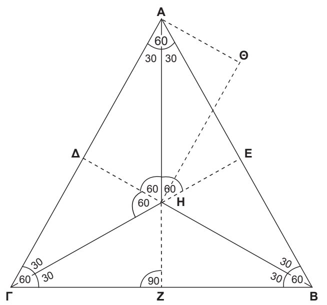

Σχήμα 1  Πλάγιο παραλληλόγραμμο



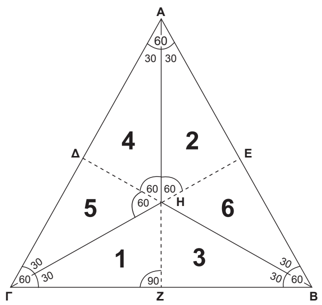

Σχήμα 2  Εφεξής ή κατά πλευράν (μείζονα)



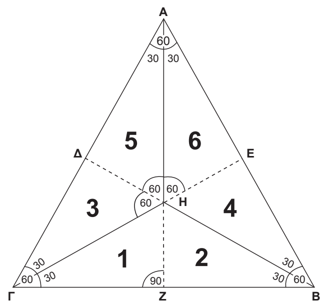

Σχήμα 3  Εφεξής ή κατά πλευράν (ελάσσονα)



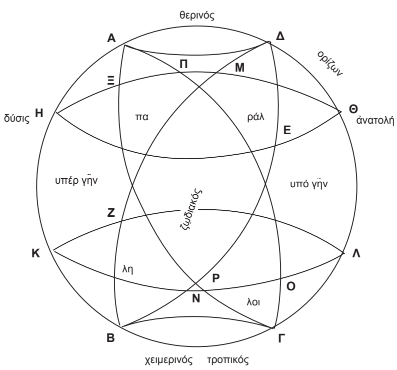

Σχήμα 4  Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο



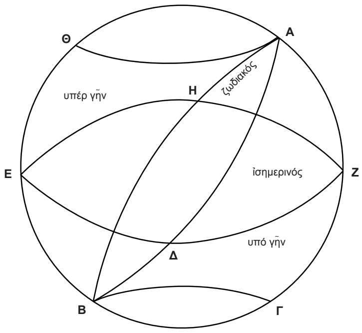

Σχήμα 5  Κατα διάμετρον (αντιφατικαί)



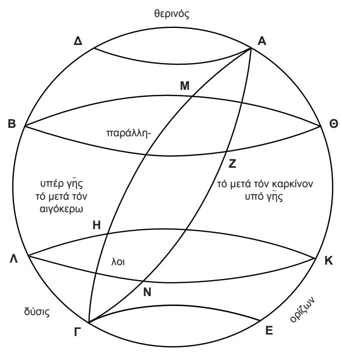

Σχήμα 6  Κατα διάμετρον (εναντίαι)




Σχήμα 7  Ευκλείδης. Φαινόμενα (Menge, σ.37)




Σχήμα 8  Ευκλείδης. Φαινόμενα (Menge, σ.33)




Σχήμα 9  Ευκλείδης. Φαινόμενα (Menge, σ.46)

# ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟ ΜΕ ΠΛΕΥΡΕΣ 3,4,5 ΩΣ ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ ΤΟΥ ΔΩΔΕΚΑΕΔΡΟΥ

**Καθηγητής Κωνσταντίνος Κωστάκης**

**Α)** Στο σχήμα 3 το τρίγωνο ΓΖΗ είναι ορθογώνιο και η μία γωνία είναι $36^0$
Αν λοιπόν ΓΖ=4 , τότε $\tan 36^0 = \frac{HZ}{\Gamma Z}$ , $\cos 36^0 = \frac{\Gamma Z}{\Gamma H}$
$\Gamma H = \frac{\Gamma Z}{\cos 36^0}$ =*4.9442* *ΗΖ=ΓΖ tan36*$^0$ *=2.9061*

Μπορούμε να δούμε ότι το τρίγωνο ΓΗΖ έχει πλευρές
*ΓΖ=4* ( ακριβώς 4) , *ΗΖ=2.9061* ( περίπου 3) , *ΓΗ=4.9442* (περίπου 5)
**Συμπέρασμα : Το τρίγωνο προσεγγίζει το Πυθαγόρειο τρίγωνο 3,4,5 ( ζωογονικό** ).

**Β)** Δύο τρίγωνα όταν έχουν όλες τις γωνίες ίσες είναι όμοια
Τα τρίγωνα ΔΑΗ και ΓΗΖ έχουν την γωνία ΔΑΗ=$36^0$ διότι είναι το ήμισυ της γωνίας Α ( που είναι $72^0$ )
και ΗΓΖ=$36^0$ ( διότι από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΒ βλέπουμε ότι γωνία ΕΓΒ=$180^0$-$90^0$-$54^0$=$36^0$ ) .
Άρα τα τρίγωνα ΔΑΗ και ΓΗΖ έχουν δύο γωνίες ίσες άρα είναι όμοια.
Ομοίως όλα τα ορθογώνια τρίγωνα του σχήματος που έχουν μια γωνία $36^0$ ,είναι όμοια, άρα
έχουμε 8 όμοια τρίγωνα . Άρα τα τρίγωνα ΓΗΖ , ΖΗΒ , ΑΕΗ , ΑΔΗ , ΑΓΖ , ΑΖΒ , ΓΕΒ , ΓΔΒ είναι όμοια
Ομοίως όλα τα ορθογώνια του σχήματος ( ΓΑΕ , ΔΑΒ , ΓΔΗ , ΕΗΒ) με μια γωνία $18^0$ είναι όμοια
**Συμπέρασμα : Από τα 12 τρίγωνα του σχήματος τα 8 είναι όμοια μεταξύ τους ( δηλαδή τα 2/3 από αυτά) και συγκροτούν μια ομάδα ομοίων τριγώνων . Τα υπόλοιπα 4 ( δηλαδή το 1/3 από το σύνολο) είναι επίσης όμοια μεταξύ τους και συγκροτούν άλλη ομάδα ομοίων τριγώνων.**

**Γ)** Θα υπολογίσουμε όλα τα υπόλοιπα μήκη του τριγώνου, με δεδομένο ότι ΓΖ=4
$\sin 36^0 = \frac{\Gamma Z}{A\Gamma}$ άρα *ΑΓ=*$\frac{\Gamma Z}{\sin 36^0}$*=6.805,* $\sin 72^0 = \frac{\Gamma E}{A\Gamma}$ άρα *ΓΕ=ΑΓsin72*$^0$*=6.805 sin72*$^0$*=6.4719*

$\cos 72^0 = \frac{AE}{A\Gamma}$ , άρα *ΑΕ=ΑΓ cos72*$^0$*=2.102*

*ΓΔ=ΑΓ-ΑΔ=6.805-2.102= 4.703 , ΗΕ=ΔΗ=ΓΕ-ΓΗ = 6.4719-4.944=1.5279*

**Δ)** Θα βρούμε μια σχέση μεταξύ των εμβαδών των δύο ομάδων των ομοίων τριγώνων
Εμβαδόν τριγώνου ΓΔΗ=(ΔΗ)(ΓΔ)/2 =(1.5279)(4.703)/2=3,592
Εμβαδόν τριγώνου ΓΗΖ=(ΓΖ)(ΖΗ)/2=4 . (2.906)/2=5.812
Άρα η σχέση εμβαδών μεταξύ των τριγώνων είναι 5.812/3.592 =1.618
Εμβαδόν τριγώνου ΑΔΗ= ΑΔ Χ ΔΗ / 2 = ΑΔ Χ ΑΔ ($\tan 36^0$) / 2 = $(ΑΔ)^2$ $\tan 36^0$ /2 = 1.606
Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΓΗΖ και (ΓΔΗ + ΑΔΗ), δηλαδή του ΓΑΗ είναι:
5.812/(3.592+1.606) = 5.812/5.198 = 9/8, εννέα όγδοα.

**Συμπέρασμα : Η σχέση μεταξύ των εμβαδών των δύο τελευταίων τριγώνων είναι ο λόγος της χρυσής τομής, αφού ισούται με το (1 + √5) / 2**

**Ε)** Θα βρούμε μια γενική σχέση μηκών των πλευρών για το τρίγωνο του σχήματος αν το μήκος ΓΖ είναι αυθαίρετο.

*Έστω ΓΖ=α ,* Τότε: $\Gamma H = \frac{\Gamma Z}{\cos 36^0} = \frac{\alpha}{0.809} = \alpha \times 1.236$ , *ΗΖ=ΓΖ tan 36*$^0$ = $\alpha \times 0.726$

Για το τρίγωνο ΓΖΗ , όπως και για όλα τα 8 όμοια τρίγωνα η σχέση μηκών των πλευρών είναι:
( 0.726 , 1 , 1.236 )
Αντίστοιχα το ζωογονικό τρίγωνο έχει σχέση μηκών των πλευρών :
( 0.75 , 1 , 1.25 )
**Συμπέρασμα : Οι δύο παραπάνω σχέσεις μηκών των πλευρών είναι προσεγγιστικά ίσες**